



Analyses numérique et analytique couplées d'un modèle d'endommagement gradué

Andrés Parrilla Gómez

► To cite this version:

Andrés Parrilla Gómez. Analyses numérique et analytique couplées d'un modèle d'endommagement gradué. Modélisation et simulation. Ecole Centrale de Nantes (ECN)/ Université Nantes Angers Le Mans 2015. Français. NNT: . tel-01391637

HAL Id: tel-01391637

<https://theses.hal.science/tel-01391637>

Submitted on 3 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Andrés PARRILLA GÓMEZ

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'École Centrale de Nantes
sous le label de l'Université Nantes Angers Le Mans*

École doctorale : Sciences pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture (SPIGA)

Discipline : Mécanique des solides, des matériaux, des structures et des surfaces

Unité de recherche : institut de recherches en Génie civil et Mécanique (GeM)

Soutenue le lundi 16 novembre 2015

***Analyses numérique et analytique couplées d'un modèle d'endommagement
gradué***

JURY

Président :

Rapporteurs :

Alain EHRLACHER, Ingénieur Général des Ponts et Chaussées - Docteur d'État
ès Sciences, École Nationale des Ponts et Chaussées

Yann MONERIE, Professeur des Universités, LMGC - Université de Montpellier

Examineurs :

Dominique LEGUILLON, Directeur de Recherches CNRS, Institut d'Alembert -
UPMC

Frédéric RAGUENEAU, Professeur des Universités, LMT - ENS de Cachan

Gilles PIJAUDIER-CABOT, Professeur des Universités, LFCR - ISA-BTP

David GRÉGOIRE, Maître de Conférences HDR, LFCR - ISA-BTP

Directeurs de thèse :

Claude STOLZ, Directeur de Recherches CNRS, École Centrale de Nantes

Nicolas MOËS, Professeur des Universités, Institut GeM - École Centrale de Nantes

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	3
LISTE DES TABLEAUX	6
LISTE DES FIGURES	7
LISTE DES ANNEXES	13
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : MODÉLISATION DES MATÉRIAUX QUASI-FRAGILES	3
1.1 Matériaux quasi-fragiles et zone d'élaboration des fissures	3
1.1.1 Zone d'élaboration	3
1.1.2 Modèle de rupture de Griffith	4
1.1.3 Modèle de zone cohésive	8
1.1.4 Modèle d'endommagement	10
1.1.5 Problèmes de localisation	11
1.2 Méthodes de régularisation des modèles d'endommagement	11
1.2.1 Non local intégral	12
1.2.2 Ordres supérieurs	13
1.2.3 Champs de phase	14
1.2.4 Méthode variationnelle	14
1.3 Méthodes par front d'endommagement	15
1.3.1 Front mince	16
1.3.2 Front mince avec énergie de surface	17
1.3.3 Front épais	18
CHAPITRE 2 : ÉTUDES PRÉLIMINAIRES SUR DES STRUCTURES SOUS CHARGEMENT QUASI-STATIQUE	24
2.1 Comportement macroscopique de structures sans rupture $E_d \neq 0$	24
2.1.1 Front d'endommagement mince	24
2.1.2 Front d'endommagement épais TLS	26
2.2 Comportement macroscopiques d'une structure avec rupture $E_d = 0$	31
2.3 Étude de stabilité et de bifurcation de trajets d'endommagement	32
2.3.1 Étude préliminaire	33
2.4 Conclusion	37
CHAPITRE 3 : ÉTUDE DE LA PROPAGATION AUTOSIMILAIRE D'UNE FISSURE	39
3.1 Recherche de la forme du front d'endommagement	39
3.1.1 Présentation de l'algorithme	39

3.1.2	Validation de l'algorithme	43
3.1.3	Application au modèle TLS	45
3.2	Étude asymptotique des champs mécaniques en pointe de fissure	50
3.2.1	Hypothèses	51
3.2.2	Demi-plan $x > 0$	52
3.2.3	Demi-plan $x < 0$	53
3.2.4	Détermination des constantes	54
3.3	Conclusions	57
CHAPITRE 4 : EFFETS D'ÉCHELLE ET EFFET DE FORME		58
4.1	Origines et lois de l'effet d'échelle	58
4.1.1	Définition de l'effet d'échelle	58
4.1.2	Effet d'échelle statistique	59
4.1.3	Effet d'échelle déterministe	60
4.2	TLS et effet d'échelle	65
4.2.1	Comportement fragile	65
4.2.2	Comportement adoucissant ou durcissant	68
4.3	Conclusions	69
CHAPITRE 5 : COMPARAISON ENTRE LE MODÈLE COHÉSIF ET L'ENDOM- MAGEMENT TLS		70
5.1	Modèles cohésif et TLS	70
5.1.1	Modèle cohésif	70
5.1.2	Modèle d'endommagement TLS	72
5.2	Comparaison et équivalence unidimensionnelle	74
5.2.1	Modèle de zone cohésive	75
5.2.2	Modèle TLS	75
5.2.3	Relations d'équivalence	76
5.2.4	Application à des cas particuliers	78
5.2.5	Deux exemples de courbes cohésives	80
5.3	Application à un problème bidimensionnel	81
5.3.1	Modèle TLS appliqué aux problèmes bi-dimensionnels	83
5.3.2	Résultats bi-dimensionnels et influence de ℓ_c	83
5.4	Conclusion	87
CHAPITRE 6 : CONFRONTATION DES SIMULATIONS TLS À DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX		88
6.1	Trajet de fissuration sous un chargement mixte	88

6.2	Effets d'échelle et de bord	89
6.2.1	Calibration des paramètres	90
6.3	Identification des résultats expérimentaux	93
6.3.1	Comparaison avec la campagne de Grégoire <i>et al.</i>	94
6.3.2	Comparaison avec la campagne de Hoover <i>et al.</i>	95
6.4	Conclusions	99
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES		100
I.1	Modèle d'endommagement par front mince	xiv
I.2	Modèle d'endommagement par front épais	xvi
I.2.1	Choix du comportement du matériau	xvi
I.2.2	Choix du profil d'endommagement	xvii
I.2.3	Équations d'équilibre et taux de dissipation	xviii
I.2.4	Analyse du premier modèle	xviii
I.2.5	Analyse du deuxième modèle d'endommagement	xxii
II.1	Modèle d'endommagement par front mince	xxix
II.2	Modèle d'endommagement par front épais TLS	xxx
II.2.1	Équations d'équilibre	xxx
II.2.2	Analyse du premier modèle	xxx
BIBLIOGRAPHIE		xxxviii
Résumé		
Title and abstract		

LISTE DES ANNEXES

Annexe I :	Cas d'un cylindre soumis à une extension radiale uniforme	xiv
Annexe II :	Comportement macroscopique d'une sphère soumise à une extension radiale uniforme	xxix
Annexe III :	Bi-linear cohesive lawxxxiv
Annexe IV :	Conditions on the parametersxxxv
Annexe V :	Damage evolution in TLS and load factorxxxvi

LISTE DES TABLEAUX

4.I	Résultats de chargement maximal et de contrainte nominale à rupture pour des simulations TLS d'éprouvettes entaillées de profondeur un cinquième du ligament ($i = 2$) avec le profil d'endommagement LINEAR et un comportement fragile. Les valeurs en italique ont une faible précision en raison du bruit dans la courbe force-ouverture extraite de la simulation.	66
4.II	Résultats de chargement maximal et de contrainte nominale à rupture pour des simulations TLS d'éprouvettes entaillées de profondeur un cinquième du ligament ($i = 2$) avec le profil d'endommagement POLY2 et un comportement fragile. Les valeurs en italique ont une faible précision en raison du bruit dans la courbe force-ouverture extraite de la simulation.	67
4.III	Résultats de chargement maximal et de contrainte nominale à rupture pour des simulations TLS d'éprouvettes entaillées de profondeur un cinquième du ligament ($i = 2$) avec le profil d'endommagement POLY3 et un comportement fragile. Les valeurs en italique ont une faible précision en raison du bruit dans la courbe force-ouverture extraite de la simulation.	67
4.IV	Comparaison entre les paramètres de la loi généralisée d'effet d'échelle de Bazant pour des éprouvettes entaillées de profondeur un cinquième ($i = 2$) avec un comportement d'endommagement fragile.	67
4.V	Résultats de chargement maximal et de contrainte nominale à rupture pour des simulations TLS d'éprouvettes entaillées de profondeur un cinquième du ligament ($i = 2$) avec le profil d'endommagement POLY3 et un comportement adoucissant donné par $h(d) = 1 + 5d$. Les valeurs en italique ont une faible précision en raison du bruit dans la courbe force-ouverture extraite de la simulation.	69
5.I	Résumé des fonctions cohésives, d'endommagement et TLS.	74
6.I	Valeurs du comportement cohésif de la meilleure identification obtenue pour les essais de [36].	95
6.II	Valeurs du comportement cohésif de la meilleure identification obtenue pour les essais de [44]. Les valeurs utilisées dans [44] sont également fournies.	95

LISTE DES FIGURES

1.1	Résultats de tomographie par rayons X d'une éprouvette en béton (obtenus par Otsuka <i>et al.</i> [66]). L'entaille est horizontale à gauche. Les microfissures à l'origine de la zone d'élaboration sont noires et le béton sain est blanc. Les lignes noires verticales proviennent du dispositif expérimental.	5
1.2	Répartition des événements acoustiques observés sur une éprouvette en béton "modèle" (obtenus par Haidar <i>et al.</i> [41]).	6
1.3	Représentation d'un milieu élastique linéaire comportant une fissure dont la pointe est précédée par une zone d'élaboration caractéristique des matériaux fragiles, ductiles et quasi-fragiles. En dessous, l'allure de la répartition des contraintes pour les trois cas. (Figure reproduite à partir de la figure 5.2.1 de [15])	7
1.4	Schéma d'une fissure et des notations utilisées.	7
1.5	Fissure se propageant sous le modèle de zone cohésive. La fissure est représentée ouverte, donc dans sa configuration déformée. On y observe une zone cohésive à l'avant de la fissure, où des contraintes normales demeurent, et à droite, une fissure complètement ouverte sans contraintes subsistantes.	9
1.6	Exemple de comportement cohésif présentant des valeurs maximales de contrainte σ et d'ouverture w	9
1.7	Représentation de l'état d'endommagement d'un solide sous le modèle de front mince Le domaine sain Ω^- est séparé du milieu endommagé Ω_c par une frontière Γ , ici en rouge.	16
1.8	Front d'endommagement sous forme de lobes. En gris clair, le matériau sain. En gris foncé le matériau endommagé. En trait plain, la frontière axysymétrique de la solution fondamentale.	18
1.9	Représentation de l'état d'endommagement d'un solide sous le modèle de front épais TLS. Le domaine sain Ω^- est séparé du milieu totalement endommagé Ω_c par une zone intermédiaire d'endommagement croissant Ω^+ . Celle-ci est séparée du milieu sain par la frontière Γ , ici en rouge. La frontière séparant la zone de transition de la zone totalement endommagée est notée Γ_c . Cette frontière est susceptible d'être un bord libre, dans le cas d'un endommagement total conduisant à un matériau sans propriétés mécaniques.	19
1.10	Exemples de profils d'endommagement linéaire (vert), quadratique (bleu) et cubique (rouge).	20

1.11	Zone d'endommagement et notations. L'abscisse curviligne s décrit le front d'endommagement (pour un problème bidimensionnel).	20
1.12	Représentation graphique des fonctions d'adoucissement : courbes de comportement de barres soumises à un chargement de traction monotone s'endommageant selon le modèle local et de façon homogène. En noir, un comportement fragile $h = 1$; en rouge et en bleu deux comportements dits <i>linéaires</i> , pour des coefficients égaux à 2 et 5 respectivement.	23
2.1	Barre en traction s'endommageant suivant le modèle de front mince. La zone saine Ω^- (gris clair) est séparée de la zone endommagée Ω_c (gris foncé) par le front d'endommagement Γ (en rouge).	25
2.2	Comportement d'une barre en extension sous le modèle d'endommagement par front mince. Les parties vertes correspondent aux chargements et déchargements élastiques. L'évolution de l'endommagement a lieu sur la partie rouge.	26
2.3	Barre en traction s'endommageant suivant le modèle de front épais TLS. La zone saine Ω^- (gris clair) est séparée de la zone endommagée Ω_c (gris foncé) par la zone d'endommagement (gris intermédiaire). Cette zone est délimitée, d'une part par le front d'endommagement Γ (en rouge), et d'autre part par la frontière Γ_c (en noir).	26
2.4	Épaisseur de la zone endommagée ℓ au cours de l'avancée du front γ	27
2.5	Comportement d'une barre en extension pour le modèle d'endommagement à transition continue TLS ($\ell_c/L = 0,4$). En trait mixte noir les comportements élastiques sain (phase I) et endommagé (phase V). En bleu, le développement de la zone d'endommagement (phase II), en rouge, son avancée avec une taille fixe ℓ_c (phase III) et en vert, sa disparition (phase IV).	30
2.6	Résumé des résultats de la résolution numérique du problème de bifurcation. La graphique représente la possibilité de bifurcation (en rouge) ou l'absence de celle-ci (en vert) en fonction de la longueur caractéristique ℓ_c (en ordonnée) et de la position ℓ du front Γ (en abscisse)	38
3.1	Domaine simulé pour le problème d'optimisation de forme et notations de la décomposition du front d'endommagement.	40
3.2	Domaine simulé pour le problème d'optimisation de forme sous les modèles TLS (à gauche) et de front mince (à droite).	41
3.3	Description globale de l'optimisation de forme	42
3.4	Description de la résolution du problème d'élasticité (3.4)	42

3.5	Champ de R , dans le cas du modèle de front mince, au cours des itérations en absence de régularisation de la vitesse d'avancée du front. Le bleu correspond à des déformations faibles et le rouge à des déformations élevées. Ici, l'algorithme est initialisé à la position exacte analytique. Le critère est pratiquement nul sur tout le front d'évolution Γ_{evol} . Les trois premières images correspondent respectivement à la 1 ^{ère} , 21 ^{ème} et 33 ^{ème} itérations. La dernière montre la densité très élevée du maillage.	44
3.6	Comportement local hyper-élastique étudié dans [89]. Ici, $\alpha = 0,5$	44
3.7	Cisaillement dans le milieu matériel. Le gris clair (respectivement foncé) correspond aux taux de cisaillement faibles (respectivement élevés). À gauche, l'ensemble du domaine. À droite, le détail autour de la zone d'endommagement ou iso- R_m . Le maillage est visible dans l'image de droite.	46
3.8	Comparaison entre l'iso- R_m (en trait plein) et l'iso- R_0 analytiques et des points extraits des mêmes lignes trouvées par l'algorithme d'optimisation de forme (croix). Les points tracés sont les intersections entre les fonctions de niveaux correspondantes et les arrêtes du maillage.	47
3.9	Profil d'endommagement linéaire.	47
3.10	Valeur de la vitesse du front à l'initiation (forme elliptique) et à convergence pour un profil d'endommagement linéaire. Pour le front à convergence, la vitesse d'avancée imposée est nulle.	48
3.11	Valeur de \bar{Y} représentée sur l'ensemble de la zone d'endommagement dans le cas du profil d'endommagement linéaire (la valeur diffère légèrement sur les segments orthogonaux au front en raison de la méthode de calcul utilisée : l'uniformité de \bar{Y} sur les segments n'est pas imposée de façon exacte. La méthode est décrite dans [18]. Les résultats sont représentés en perspective avec une hauteur proportionnelle à la valeur de \bar{Y} . On observe sur les deux premières figures le champ de \bar{Y} pour des initialisations elliptique (à gauche) et circulaire (à droite). En bas, le champ à convergence. Sur la deuxième image, le maillage utilisée est visible en vert à hauteur nulle.	49
3.12	Profil d'endommagement dit <i>parabolique</i> . En rouge les comportements asymptotiques paraboliques en $3\hat{\phi}^2$	50
3.13	Valeur de la vitesse du front à l'initiation (forme circulaire) et à convergence pour un profil d'endommagement dit <i>parabolique</i> . Pour le front à convergence, la vitesse d'avancée imposée est nulle.	51
3.14	Gradient nodal par élément de la fonction de niveau dans la configuration convergée de la position du front d'endommagement. En bleu, le maillage et en noir des iso-valeur de l'endommagement.	52

3.15	Profil d'endommagement dit cubique. En rouge les comportement asymptotique cubique $10\hat{\phi}^3$	53
3.16	Forme de la solution au problème d'élasticité autour de la pointe de la quasi-fissure pour le profil linéaire ($\beta = 1$). À gauche, la forme de la fonction $f(\theta)$. À droite, une représentation tridimensionnelle du déplacement sur le demi-plan $y > 0$. L'allure est similaire à celle du champ de déplacement autour de la pointe d'une fissure dans un milieu élastique homogène.	55
3.17	Iso-valeurs du déplacement. Les valeurs sont négatives (en bleu) dans le demi-plan $y < 0$, positives (en rouge) dans le demi-plan $y > 0$ et passent par 0 (en vert) sur la ligne de symétrie. Les courbes couvrant tout le domaine correspondent au résultat numérique. Celles restreintes au voisinage de la pointe de la quasi-fissure correspondent au champ asymptotique analytique. En bleu sont aussi tracés l'iso-zéro de la fonction de niveau (soit le front d'endommagement) et l'iso- ℓ_c . On observe la coïncidence des iso-déplacements autour de la pointe de la quasi-fissure.	56
3.18	Forme de la solution au problème d'élasticité autour de la pointe de la quasi-fissure pour le profil parabolique ($\beta = 2$). À gauche, la forme de la fonction $f(\theta)$. À droite, une représentation tridimensionnelle du déplacement sur le demi-plan $y > 0$. L'allure est similaire à celle du champ de déplacement autour de la pointe d'une fissure dans un milieu élastique homogène.	57
4.1	Loi d'effet d'échelle de Bažant. Les deux échelles sont logarithmiques. Les traits pointillés correspondent aux deux asymptotes. La courbe noire correspond à la loi classique ($r = 1$), la bleu à $r = 2$ et la rouge à $r = 0,5$	62
4.2	Résultats d'effet d'échelle du modèle TLS avec un comportement fragile et pour des éprouvettes entaillées à un cinquième de leur épaisseur. Les résultats pour trois profils d'endommagement sont donnés.	68
5.1	Comportement d'une zone cohésive classique pour une ouverture imposée croissante.	72
5.2	Courbes contrainte-ouverture.	73
5.3	Déplacement sur l'ensemble de la barre partiellement endommagée à un état de chargement donné. Les modèles TLS et cohésif sont représentés.	74
5.4	Forme classique d'une zone endommagée et définition des longueurs ℓ_{coh} et ℓ_c	79
5.5	Profil d'endommagement appelé POLY2	80
5.6	Comportement cohésif linéaire et comportements locaux TLS associés.	81

5.7	Comportement cohésif bilinéaire et comportements locaux TLS associés.	82
5.8	Représentation d'une fissure ouverte avec une zone cohésive (à gauche) et avec une zone endommagée TLS (à droite). Le gris foncé (respectivement clair) correspond à la zone endommagée (resp. saine).	82
5.9	Essai de flexion trois points (TPB)	84
5.10	Répartition de l'endommagement dans le domaine à un instant donné. Le bleu correspond au matériau sain, le rouge à un endommagement proche de 1 et la zone blanche à la fissure (endommagement égal à 1).	84
5.11	Comportement global de simulations TLS d'un essai de flexion trois points pour différents ℓ_c . Sont tracés les résultats bruts de la simulation.	85
5.12	Position du front d'endommagement au chargement maximal pour différentes valeurs de ℓ_c	85
5.13	Définition de S_y	86
5.14	Distribution des contraintes dans la zone d'élaboration pour le modèle TLS avec différentes valeurs de ℓ_c . L'abscisse est un déplacement équivalent à l'ouverture cohésive. La courbe noire correspond au comportement cohésif bilinéaire.	87
6.1	Évolution de l'endommagement dans une simulation du modèle TLS.	89
6.2	Comparaison entre les résultats des modèles TLS et cohésif. Le rayon de la zone d'endommagement initiale est de $0.10\ell_c$	90
6.3	Comparaison entre les résultats des modèles TLS et cohésif. Le rayon de la zone d'endommagement initiale est de $0.75\ell_c$	91
6.4	Comportement cohésif bi-linéaire et notations.	92
6.5	Endommagement moyen des interfaces obtenu à partir d'une simulation d'un modèle mésoscopique <i>lattice</i> (en trait plein noir) et le profil d'endommagement identifié (en trait interrompu bleu).	93
6.6	Description de la géométrie des poutres (source : [36])	94
6.7	Comparaison entre les résultats des simulations TLS, <i>lattice</i> [34] et les résultats expérimentaux [36]. Les données brutes sont tracées pour les simulations TLS.	96
6.8	Comparaison entre les résultats des simulations TLS, du modèle cohésif [44] et les résultats expérimentaux [46]. Les données brutes sont tracées pour les simulations TLS.	97
6.9	Comparaison entre les résultats des simulations TLS, du modèle cohésif [44] et les résultats expérimentaux [46]. Les données brutes sont tracées pour les simulations TLS.	98

I.1	Cylindre en traction s'endommageant suivant le modèle de front mince. La zone saine Ω^- (gris clair) est séparée de la zone endommagée Ω_c (gris foncé) par le front d'endommagement Γ (en rouge).	xiv
I.2	Comportement d'un cylindre en extension radiale uniforme sous le modèle d'endommagement par front mince. Les parties vertes correspondent aux chargements et déchargements élastiques. L'évolution de l'endommagement a lieu sur la partie rouge.	xvi
I.3	Comportement d'un cylindre en extension radiale. - Modèle d'endommagement à transition continue avec un profil d'endommagement linéaire. En vert, les trajets réversibles et en rouge, le trajet irréversible d'endommagement.	xxi
I.4	Comportement d'un cylindre en extension radiale. - Modèle d'endommagement à transition continue avec le deuxième profil d'endommagement donné. En trait mixte noir les comportements élastiques sain (phase I) et endommagé (phase V). En bleu, le développement de la zone d'endommagement (phase II), en rouge, son avancée avec une taille fixe ℓ_c (phase III) et en vert, sa disparition (phase IV).	xxii

INTRODUCTION

Le dimensionnement des structures est l'un des enjeux principaux de l'ingénieur. Depuis l'antiquité, il a été nécessaire de prévoir les caractéristiques géométriques et les matériaux adaptés aux différents usages des objets, des bâtiments et des ouvrages d'art. Cependant, ce n'est qu'à la fin du XX^{ème} siècle qu'éviter le surdimensionnement apparaît comme une contrainte importante. En effet, la nécessité de réduire l'impact négatif de l'action de l'Homme sur l'environnement met au premier plan la réduction d'émissions de gaz à effet de serre, de polluants et de déchets non recyclables ainsi que la surexploitation des ressources naturelles. Ainsi, on s'intéresse à la réduction de la masse des produits industriels et des quantités de matières premières utilisées. Il importe alors d'adapter les structures aux charges en service. Or, ceci doit se faire sans augmenter le risque de dysfonctionnement ou de catastrophe et éviter ainsi leurs conséquences humaines ou environnementales. En effet, adapter les structures aux charges qu'elles supportent implique de rapprocher leur chargement d'utilisation de la charge qui entraînera leur ruine. Une problématique scientifique de recherche est alors mise en évidence : la compréhension, la prédiction et la maîtrise des phénomènes entraînant la ruine des structures. De nombreuses observations et études ont été menées afin de comprendre comment la dégradation des différents matériaux a lieu. Bien que pour des matériaux composites complexes, ceci soit encore de nos jours un axe de recherche majeur, on peut considérer que les phénomènes physiques qui entraînent la dégradation des matériaux connus et utilisés depuis longtemps, comme les métaux ou les matériaux cimentaires, sont suffisamment compris aujourd'hui pour pouvoir tenter de les modéliser. Si l'on s'intéresse en particulier au béton, il est connu que sa ruine sous des chargements mécaniques se produit par la décohérence des granulats et de la matrice qui entraîne la création de microfissures qui coalescent provoquant alors l'apparition et l'évolution de macro-fissures. Différents modèles, présentés dans la partie 1, ont tenté de représenter ces phénomènes. Cependant, aucun d'entre eux ne présente les caractéristiques que l'ingénieur attend d'un tel modèle : des résultats pertinents avec un coût de calcul raisonnable. On se penchera donc sur un modèle développé depuis quelques années et nommé *Thick Level Set* ou TLS. Certaines études préliminaires permettant une meilleure compréhension du modèle et des paramètres qu'il comporte sont menées dans la partie 2. Dans une troisième partie, on représente à l'aide de ce modèle l'évolution d'une macro-fissure dans des conditions de propagation auto-similaire. Dans une quatrième partie, on étudie la capacité du modèle à rendre compte des effets d'échelle et de bord : effets principaux connus caractérisant la réponse d'éprouvettes en béton. Ces études mettront en évidence la nécessité de raffiner le modèle TLS en introduisant un comportement adoucissant particulier, qui sera obtenu par une équivalence de comportement unidimensionnel entre le modèle TLS et le modèle cohésif présentée dans la partie 5. Finalement, le modèle TLS est confronté dans la partie 6 à des résultats expérimentaux mettant en jeu les effets d'échelle et de bord. En conclusion, on ana-

lyse les performances du modèle TLS et sa position dans l'ensemble des familles des modèles d'endommagement et de rupture.

CHAPITRE 1

MODÉLISATION DES MATÉRIAUX QUASI-FRAGILES

Les problèmes de rupture sont récurrents en mécanique. Que l'on travaille avec de l'acier, du béton ou des matériaux composites, que les structures étudiées soient des systèmes mécaniques ou des ouvrages d'art, les concepteurs cherchent toujours à éviter la rupture, ou du moins, à comprendre comment elle risque de se produire. Depuis les études de A. Griffith [35] au début du siècle dernier, on cherche à modéliser les mécanismes de la rupture et de l'endommagement afin de prédire l'apparition et la propagation de fissures et de défauts dans les matériaux. Les travaux dans ce domaine sont nombreux mais un modèle permettant de décrire de façon satisfaisante à la fois l'initiation et la propagation de fissures dans les matériaux quasi-fragiles, et ce quelle que soit la taille et la forme de la structure, n'a pas été élaboré.

1.1 Matériaux quasi-fragiles et zone d'élaboration des fissures

On considère un plan dans lequel se propage la fissure considérée comme une ligne le long de laquelle le déplacement peut être discontinu avec des conditions de contact unilatéral — contrainte normale de compression ou de bord libre —. Une première analyse de ce problème fut réalisée par A. Griffith [35] en 1921 en considérant que l'ensemble du milieu dans lequel se propageait la fissure avait un comportement élastique linéaire (cf. 1.1.2). Cependant, l'existence d'une zone au comportement non-linéaire à l'avant de la fissure a été mise en évidence expérimentalement (cf. 1.1.1). La prise en compte de cette zone a tout d'abord été faite par le modèle de zone cohésive (cf. 1.1.3) puis par des modèles d'endommagement (cf. 1.1.4).

1.1.1 Zone d'élaboration

L'existence théorique d'une zone d'élaboration, comprise en tant que zone de comportement non-linéaire autour de la pointe d'une fissure, se comprend aisément par l'analyse des champs de déformations et de contraintes si l'on suppose le matériau élastique linéaire (cf. 1.1.2). En effet, ceux-ci divergent autour de la pointe de la fissure, ce qui sort du cadre des petites déformations qui justifient classiquement le comportement linéaire.

Différentes méthodes expérimentales ont permis de mettre en évidence l'existence d'une zone au comportement complexe à l'avant de la fissure. D'une part, des méthodes optiques — comme la tomographie aux rayons X — et d'autre part des méthodes acoustiques — comme l'analyse des émissions acoustiques — ont permis de mieux comprendre la forme et la taille de cette zone. Sont reproduites dans les figures 1.1 et 1.2 certains résultats de la littérature. On y

observe qu'il existe effectivement une zone où apparaissent des micro-fissures qui provoquent une dissipation d'énergie — dont témoignent les émissions acoustiques —. Cette zone, plus ou moins allongée, change de forme et de taille au cours du chargement. Dans [66] est menée une étude énergétique qui montre l'importance de l'énergie dissipée dans la zone d'élaboration par rapport à l'énergie globale liée à l'avancée de la fissure macroscopique.

La notion de zone d'élaboration et les phénomènes non linéaires qui lui sont associés ne sont pas réservés à l'apparition de microfissures comme dans le béton. Il est possible d'observer des zones de concentration d'autres phénomènes physiques à l'origine de la plasticité comme par exemple dans les métaux. Les différents phénomènes donnent lieu à deux parties distinctes de la zone d'élaboration : une zone d'adoucissement et une autre de durcissement. Les tailles relatives de celles-ci par rapport à la taille de la structure définissent différents types de comportements macroscopiques (cf. 1.3). Lorsque l'ensemble de la zone d'élaboration est petite devant la taille de la structure, on parle de matériaux fragiles. Lorsque la zone durcissante n'est pas négligeable devant la taille de la structure alors que la zone adoucissante l'est, le matériau est qualifié de ductile. Finalement, lorsque seule la zone adoucissante est non négligeable, le matériau est appelé quasi-fragile. Il est important de remarquer que les qualificatifs de fragile, ductile et quasi-fragile ne peuvent théoriquement pas s'appliquer à un matériau seul mais devraient concerner l'ensemble de la structure, puisque sa taille est prise en compte dans la définition. Cependant, l'abus de langage est acceptable à partir du moment où l'on admet que les structures de référence ont des tailles adaptées à leurs applications habituelles. Dans le cas du béton, dont la zone d'élaboration adoucissante est de quelques dizaines de centimètres et la taille des structures est de l'ordre du mètre, on parlera de matériau quasi-fragile.

On ne s'intéressera pas ici aux matériaux ductiles qui peuvent présenter un durcissement local. Les principaux modèles permettant de représenter les matériaux fragiles et quasi-fragiles sont présentés dans la suite de ce chapitre. L'objectif majeur étudié ici étant de simuler des structures en béton ou en mortier, les seuls modèles historiquement utilisés à cette fin sont présentés dans la suite.

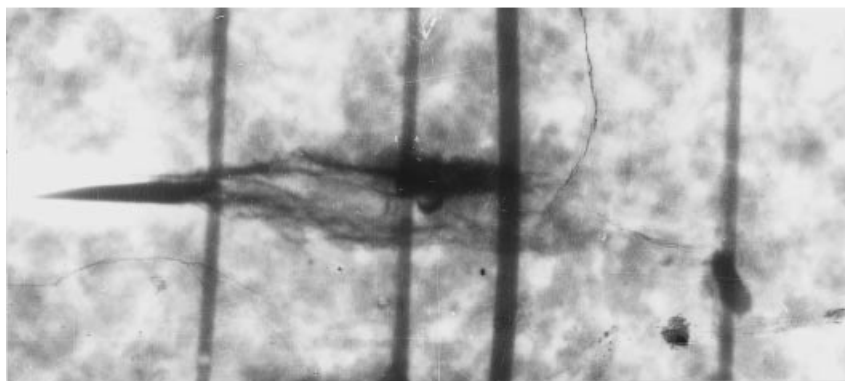
1.1.2 Modèle de rupture de Griffith

Le modèle de rupture de Griffith est le premier à prendre en compte un critère énergétique de la rupture. Ayant constaté l'insuffisance des critères en contraintes dans le cas des structures fissurées, un critère énergétique de la rupture est établi à partir de la résolution du problème d'élasticité d'une plaque fissurée [35, 47]. Rappelons le problème d'élasticité, sa résolution et le critère de Griffith. Le paramétrage utilisé est présenté en figure 1.4. Dans le cas des déformations planes, le champ de contrainte dérive d'une fonction scalaire, la fonction d'Airy ϕ :

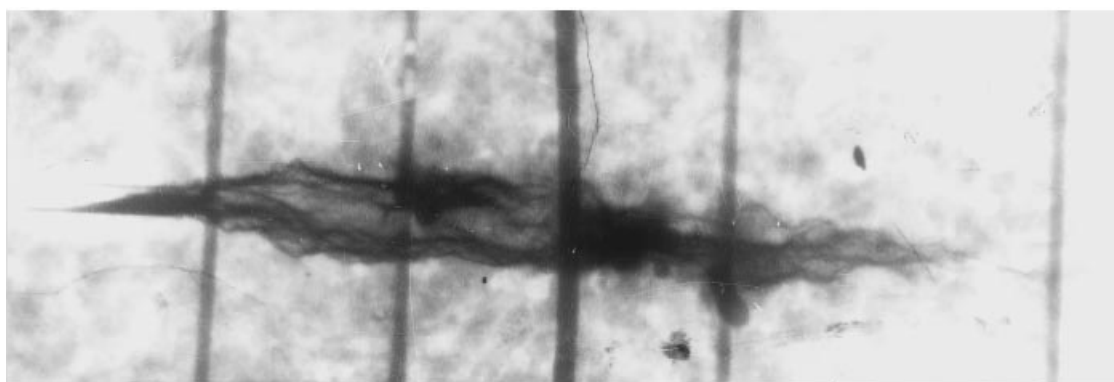
$$\forall(i, j), \quad \sigma_{ij} = \delta_{ij} \Delta \phi - \phi_{ij}, \quad (1.1)$$



(a) À la charge maximale.



(b) À 70 % de la charge maximale après le pic.



(c) À 30 % de la charge maximale après le pic.

Figure 1.1 – Résultats de tomographie par rayons X d'une éprouvette en béton (obtenus par Otsuka *et al.* [66]). L'entaille est horizontale à gauche. Les micro-fissures à l'origine de la zone d'élaboration sont noires et le béton sain est blanc. Les lignes noires verticales proviennent du dispositif expérimental.

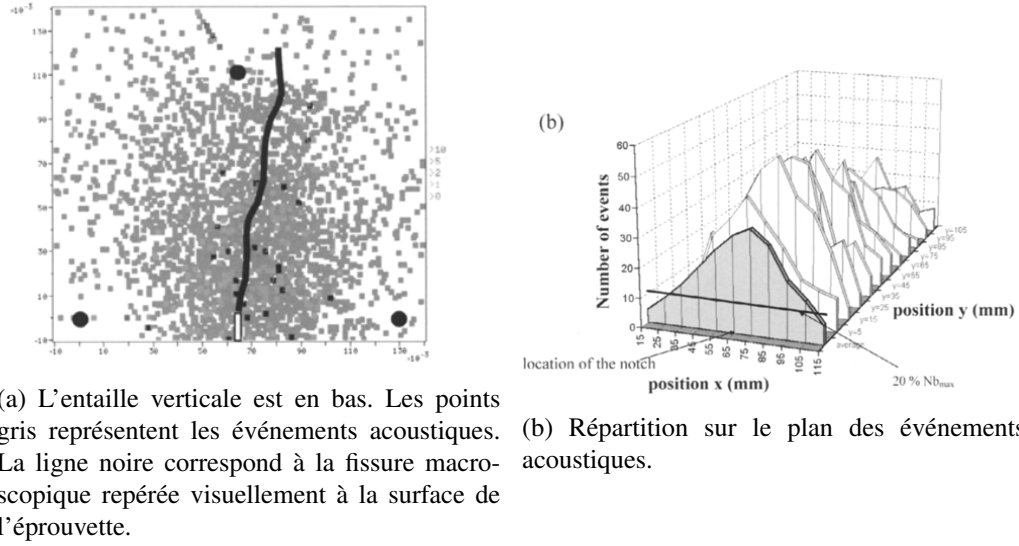


Figure 1.2 – Répartition des événements acoustiques observés sur une éprouvette en béton "modèle" (obtenus par Haidar *et al.* [41]).

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et ϕ est la fonction d'Airy. L'équilibre s'écrit alors

$$\Delta\Delta\phi = 0, \quad (1.2)$$

dans le domaine. Il s'agit de l'équation de Beltrami, à laquelle on doit ajouter des conditions aux limites sur la frontière du solide considéré. On suppose que la fissure est représentée par une ligne le long de laquelle le déplacement est discontinu. Dans le cas où la fissure est ouverte, les lèvres de la fissure sont libres de contraintes.

La solution à énergie finie de l'équation de Beltrami qui vérifie les équations d'équilibre et les conditions limites s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[5 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[-5 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \dots, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[-3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3 \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \dots, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

où K_I et K_{II} sont deux constantes appelées facteurs d'intensité de contraintes. Les équations d'équilibre en élasticité linéaire sont décrites dans l'hypothèse des petites perturbations, les contraintes et les déformations sont supposées rester infinitésimales alors qu'ici elles tendent

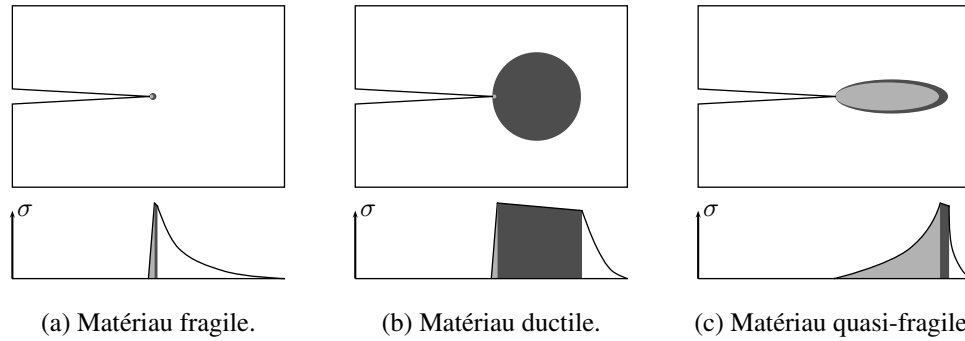


Figure 1.3 – Représentation d’un milieu élastique linéaire comportant une fissure dont la pointe est précédée par une zone d’élaboration caractéristique des matériaux fragiles, ductiles et quasi-fragiles. En dessous, l’allure de la répartition des contraintes pour les trois cas. (Figure reproduite à partir de la figure 5.2.1 de [15])

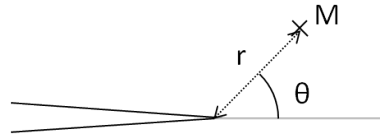


Figure 1.4 – Schéma d’une fissure et des notations utilisées.

vers l’infini autour de la pointe de la fissure. Cette approche est une approche asymptotique par l’extérieur, c’est à dire que la fissure induit dans son voisinage un champ qui décroît comme \sqrt{r} .

Intéressons nous à présent à la propagation quasi-statique de cette fissure. À cette fin, on va supposer que l’avancement de la fissure d’une longueur δl implique la dissipation d’une certaine quantité d’énergie, proportionnelle à δl comme le propose Griffith [35]. Quand la fissure se propage, le matériau perd de la cohésion ; l’accroissement de la fissure fait diminuer l’énergie de cohésion globale du solide. L’énergie perdue par unité de surface créée est une énergie de surface notée G_c . Un avancement virtuel de la fissure de longueur δl entraîne une dissipation d’énergie $G\delta l$. Si $G\delta l$ est inférieure à $G_c\delta l$, la fissure n’avance pas. Si, au contraire, l’énergie qui serait dissipée est égale à l’énergie de surface, *i.e.* $G = G_c$, alors la fissure peut avancer. Cette loi de propagation peut s’écrire sous la forme d’une loi de normalité :

$$G - G_c \leq 0 \quad (1.4)$$

$$\dot{l} \geq 0 \quad (1.5)$$

$$(G - G_c)\dot{l} = 0 \quad (1.6)$$

Si l’on s’intéressait à la propagation dynamique de la fissure, une loi d’évolution plus complexe devrait être envisagée [27]. La caractérisation de la perte d’énergie du solide pour une avancée

δI donnée est liée en élasticité linéaire à la variation d'énergie potentielle du système. Isolant la singularité, on montre que

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2. \quad (1.7)$$

Introduisons l'intégrale de Rice [26, 79], est indépendante du contour Γ choisi pour un milieu homogène,

$$J = \int_{\Gamma} (w n_x - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}_{,x}) da, \quad (1.8)$$

où w est l'énergie de déformation. Dans le cas de l'élasticité linéaire $G = J$, ce qui permet de déterminer G par la donnée des champs sur la frontière extérieure au domaine. Dans le cas d'un milieu infini, en traction uniforme de valeur σ_{∞} , pour une fissure de longueur l on montre alors que

$$G \propto \sigma_{\infty}^2 \cdot l. \quad (1.9)$$

Un raisonnement naturel est de considérer l'initiation d'une fissure comme la propagation d'une fissure infiniment petite, un défaut microscopique. Or, d'après la relation précédente, pour qu'il y ait propagation de la fissure, il faut $\sigma_{\infty} \propto 1/\sqrt{l}$. Donc, la propagation d'une fissure infinitésimale nécessite une contrainte σ_{∞} imposée infinie. L'amorce d'une fissure courte ne peut donc être traduite par la mécanique linéaire de la rupture, laquelle décrit seulement les conditions de propagation d'une fissure existante. Par ailleurs, ce modèle correspond à un matériau élastique linéaire dans l'ensemble du domaine et ne prend donc pas en compte les phénomènes non-linéaires ayant lieu à l'avant de la fissure. Dans le cas des matériaux quasi-fragiles comme le béton, cela conduit à certains écarts avec l'expérience. En effet, certains auteurs décrivent [43, 56] une *dépendance* du taux de restitution d'énergie critique à la taille de la structure. Dans ce cas, le critère de Griffith ne peut pas s'appliquer. Ainsi sont apparus des modèles dits "de zone cohésive", qui prennent en compte une zone d'élaboration linéique, distribuant la dissipation d'énergie sur une longueur non nulle.

1.1.3 Modèle de zone cohésive

Le modèle de zone cohésive voit le jour dans les années soixante afin de modéliser des matériaux ductiles d'abord [28] et quasi-fragiles ensuite [5]. Il introduit une transition continue entre le matériau sain et la fissure par le biais d'une loi de comportement reliant la contrainte d'ouverture et le saut de déplacement entre les lèvres de la fissure. Ainsi, sous ce modèle, une fissure en cours de propagation est constituée de deux parties : d'abord une zone cohésive où un saut de déplacement existe mais une contrainte empêchant l'ouverture subsiste, et une zone complètement ouverte où aucune contrainte empêche l'ouverture de la fissure (figure 1.5). Différentes formes de lois de comportement cohésives ont été étudiées dans la littérature. La plupart d'entre

elles présentent cependant des valeurs de contrainte et d'ouverture maximales comme dans la figure 1.6. Il existe cependant des modèles à contrainte initiale infinie (mais à intégrale finie) qui correspondent à une divergence des contraintes à l'avant de la zone cohésive [30] et des modèles à ouverture maximale infinie, comme les exponentiels [25, 62]. Les modèles cohésifs permettent

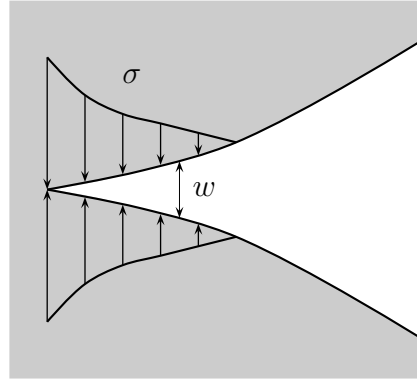


Figure 1.5 – Fissure se propageant sous le modèle de zone cohésive. La fissure est représentée ouverte, donc dans sa configuration déformée. On y observe une zone cohésive à l'avant de la fissure, où des contraintes normales demeurent, et à droite, une fissure complètement ouverte sans contraintes subsistantes.

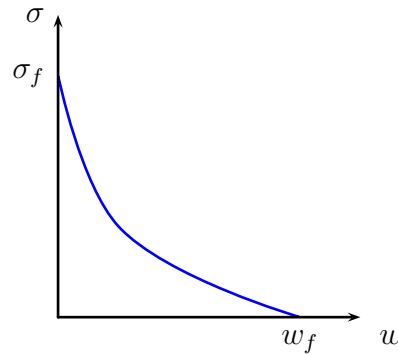


Figure 1.6 – Exemple de comportement cohésif présentant des valeurs maximales de contrainte σ et d'ouverture w .

par ailleurs de prendre en compte l'initiation et la fissuration par l'intermédiaire du modèle de fissure fictive ou *fictitious crack model* [42]. Dans ce cas, une fissure cohésive est introduite dès que la contrainte atteint la valeur maximale de la loi d'adoucissement utilisée pour la propagation des fissures.

Avant même l'apparition de ces modèles cohésifs élaborés en tant que tel, Bazant proposait un modèle similaire [11] qui héritait des tentatives de mise en place de méthodes numériques capables de représenter simplement la propagation de fissures [78]. Le modèle *crack band*, ou de

"bande fissurée", introduit un comportement adoucissant au sein de certains éléments qui vont ainsi constituer la "zone cohésive". Cette approche est purement numérique lors de son apparition et présente une dépendance pathologique au maillage. En effet, la largeur de la "bande fissurée" est directement reliée à la taille des éléments. Ainsi, sans précautions particulières, l'énergie dissipée par la propagation d'une fissure devient dépendante du maillage. Cependant, Elices et Planas ont pu montrer *a posteriori* l'équivalence avec le modèle cohésif [30], dont il devient une méthode numérique simple à mettre en œuvre.

À cette description de la fissure cohésive ou de *crack band* il faut bien évidemment ajouter une loi d'évolution. Celle-ci sera introduite avec un formalisme plus rigoureux dans la partie 5.

Le modèle de zone cohésive reste cependant très attaché à la notion de fissure et donc à une modélisation de la zone d'élaboration par une zone de mesure nulle, en négligeant la largeur de la zone d'élaboration. Par ailleurs, ce type de modèle n'autorise pas l'endommagement diffus dans une grande zone de la structure. De ce fait, ces modèles rencontrent des difficultés en tant qu'outils d'ingénierie pour la modélisation de l'apparition et de la propagation de l'endommagement [15].

1.1.4 Modèle d'endommagement

Les modèles continus d'endommagement considèrent la perte de rigidité locale associée à des phénomènes irréversibles microscopiques, comme des micro-fissures ou des micro-cavités. L'origine de ces modèles date des années cinquante et soixante [49, 78]. Ces modèles supposent l'existence d'au moins une variable interne qui représente la densité de micro-défauts, notée d . Dans le cas d'une grandeur scalaire, celle-ci est comprise entre 0 pour un matériau sain et 1 lorsque l'endommagement maximal est atteint. La densité d'énergie dans un milieu, que l'on suppose ici isotrope dans un souci de simplicité, s'écrit

$$\Phi(\varepsilon, d) = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}(d) : \varepsilon \quad (1.10)$$

La dérivée de la raideur par rapport à la variable d'endommagement $\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial d}$ doit être négative puisque le matériau perd de la raideur lorsque les phénomènes dissipatifs ont lieu. Remarquons par ailleurs que $\mathbb{C}(1)$ doit être nul si l'on souhaite représenter une zone endommagée ne supportant plus aucune traction. Ceci n'est pas une condition absolue et certains cas seront analysés dans la suite pour lesquels $\mathbb{C}(1)$ est non nul, représentant donc une dégradation du matériau qui conserve cependant une partie de ses propriétés mécaniques. On associe à ce potentiel un taux de restitution d'énergie, que l'on notera Y

$$Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial d} \quad (1.11)$$

qui permet d'écrire un critère local d'irréversibilité de l'endommagement $f_{\text{CDM}}(Y, d) \leq 0$ — le sigle CDM provient de l'anglais *continuum damage mechanics* — et une loi d'évolution

$$\begin{cases} f_{\text{CDM}}(Y, d) \leq 0 \\ \dot{d} \geq 0 \\ f_{\text{CDM}}(Y, d)\dot{d} = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Classiquement, on définit un taux de restitution d'énergie critique local $Y_c(d)$ et on pose, pour des problèmes quasi-statiques :

$$f_{\text{CDM}}(Y, d) = Y - Y_c = -\frac{1}{2} \varepsilon : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial d}(d) : \varepsilon - Y_c(d) \quad (1.13)$$

La forme du taux de restitution d'énergie critique $Y_c(d)$ pilote le comportement local du matériau. Dans la suite, différentes fonctions $Y_c(d)$ seront étudiées.

1.1.5 Problèmes de localisation

Le problème d'endommagement local posé précédemment entraîne certains problèmes de bifurcation — non-unicité — et donc de résolution numérique [11]. En effet, considérons une barre homogène soumise à un chargement de traction croissant. Le comportement est élastique linéaire tant que la déformation, identique en tout point, reste sous le seuil critique $\varepsilon_c = \sqrt{2EY_c}$ où E est le module de Young (cf. (1.13) et (1.12)). Une fois cette valeur atteinte, l'endommagement peut évoluer en tout point, en un seul point ou sur un nombre de points quelconque, fini ou infini : il existe une infinité de bifurcations possibles. Le modèle présente donc un problème d'unicité qui se manifeste notamment dans l'énergie dissipée par l'endommagement. En effet, si la zone endommagée est de mesure nulle, l'énergie dissipée est nulle. Si l'endommagement est homogène dans la barre, la dissipation est maximale. Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles. Remarquons que ce défaut du modèle a sa manifestation numérique dans une dépendance au maillage ou *spurious mesh-dependency* : l'énergie dissipée dépend de la taille du maillage.

L'existence de tels problèmes a conduit à la modification de ce modèle d'endommagement local en vue de le régulariser, c'est-à-dire de le modifier légèrement afin de limiter les bifurcations possibles et de rendre à l'énergie dissipée un sens physique et son indépendance vis-à-vis du maillage. Cette régularisation introduit une longueur caractéristique dans le modèle. Une revue non exhaustive des principales méthodes de régularisation est donnée dans la partie suivante.

1.2 Méthodes de régularisation des modèles d'endommagement

Il existe différentes familles de méthodes de régularisation du modèle local d'endommagement dont les principales sont présentées ici. Les méthodes non locales intégrales [73] consi-

dèrent des déformations moyennées dans la loi d'évolution. Les méthodes d'ordre supérieur introduisent le gradient de la déformation ou de l'endommagement dans la formulation. Héritées de la physique, les méthodes de champs de phase décrivent la transition entre deux phases d'un même matériau à l'aide d'un paramètre d'ordre.

1.2.1 Non local intégral

La méthode d'endommagement non-local intégral tente, sans changer le fond mécanique de la théorie précédente, de limiter le problème de bifurcation en lissant certaines grandeurs mécaniques. Ainsi, on modifie la force thermodynamique [73], qui n'est plus le taux de restitution d'énergie G , soit

$$G = -\frac{\partial W}{\partial d} = -\frac{1}{2} \varepsilon : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial d} : \varepsilon, \quad (1.14)$$

mais un taux de restitution d'énergie moyenné \bar{G} défini sur un volume V entourant le point M :

$$\bar{G}(M) = -\frac{1}{V} \int_V \frac{\partial W}{\partial d}(M + dM) dV_M, \quad (1.15)$$

où dV_M est le volume élémentaire associé à dM . La prise en compte d'une telle expression dans une résolution analytique d'un problème de propagation d'une zone endommagée semble difficile. Cependant, pour une résolution numérique discrétisée, la prise en compte d'un champ moyen est envisageable. Dans l'intégrale ci-dessus peut être ajoutée une pondération spatiale en fonction de la position de dM , comme le propose G. Pijaudier-Cabot [72].

Habituellement, on lisse uniquement les déformations, et une fonction poids de type gaussienne est utilisée. Les équations du problème modifié s'écrivent alors :

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\psi(\mathbf{x})} \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \varepsilon(\mathbf{y}) d\Omega(\mathbf{y}), \quad (1.16)$$

avec,

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{y}), \quad (1.17)$$

et

$$\Psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} l^3} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2}{2l^2}\right). \quad (1.18)$$

Cette méthode résout partiellement le problème de localisation sans chercher de justification théorique particulière. Remarquons qu'une échelle d'espace est introduite — l dans l'équation 1.18 —, par la définition d'un volume d'influence autour des points. Par ailleurs \bar{G} n'est pas maximal à la pointe de la fissure. Il existe donc un décalage spatial de la solution autour de la pointe.

Les méthodes non locales comportent une complexification du modèle qui augmente le coût

de calcul nécessaire à la résolution, car cette méthode de régularisation est effectuée sur tout le domaine d'étude, alors que les grandeurs locales suffisent à la résolution dans la plus grande partie du domaine.

1.2.2 Ordres supérieurs

1.2.2.1 Ordre cinématique supérieur

Dans les années quatre-vingt dix, on a fait évoluer le modèle non-local précédent, en introduisant le développement de Taylor de la déformation pour calculer les grandeurs moyennées [69, 70]. Ainsi, le développement de ε en \mathbf{x} ,

$$\varepsilon(\mathbf{y}) = \varepsilon(\mathbf{x}) + \nabla \varepsilon(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \nabla^2 \varepsilon(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2 + \dots, \quad (1.19)$$

fournit, en l'introduisant dans (1.16) et en se contentant du premier terme non nul de la moyenne,

$$\bar{\varepsilon} \approx \varepsilon + c \nabla^2 \varepsilon, \quad (1.20)$$

où c est une constante qui dépend de la forme de la fonction de poids choisie. Ce coefficient est homogène à l'inverse d'une longueur au carré. On introduit donc dans ce modèle une longueur caractéristique.

En pratique, le calcul numérique de $\bar{\varepsilon}$ est fait à partir de la définition équivalente

$$\bar{\varepsilon} - c \nabla^2 \bar{\varepsilon} = \varepsilon \quad (1.21)$$

afin d'éviter le problème de l'approximation du laplacien pour des fonctions de forme de bas degré. Or, ceci introduit une difficulté supplémentaire. En effet, $\bar{\varepsilon}$ est obtenu par la résolution d'un problème aux limites ; il est alors nécessaire de se donner des conditions aux limites en $\nabla \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}$ sur la frontière du domaine. Le choix est souvent fait d'imposer une valeur nulle, mais aucune justification n'est fournie.

1.2.2.2 Modèles à gradient d'endommagement

Un raisonnement similaire peut être appliqué à l'endommagement, en imposant à la variable d une certaine régularité. Certains auteurs, dont Frémond et Nedjar [33] et Nguyen et Andrieux [63] ont ainsi été amenés à ajouter un terme à l'énergie libre, qui va venir pénaliser les variations brusques d'endommagement :

$$w = w_{local} + \frac{1}{2} k (\nabla d)^2 \quad (1.22)$$

On obtient avec cette méthode des résultats semblables à ceux des méthodes fondées sur les développements de Taylor du déplacement.

1.2.3 Champs de phase

Plus récemment, dans les années deux mille, une méthode trouvant son origine dans des problèmes physiques de changement de phase est venue enrichir le catalogue des approches possibles [50]. Ces méthodes introduisent un paramètre d'ordre qui décrit la transition entre les phases. L'endommagement peut donc être vu comme un problème de transition de phase irréversible, où le paramètre d'ordre est relié à la variable d'endommagement classique d , interprété comme une image de la densité de micro-défauts dans le matériau. Par exemple, dans [55], l'endommagement est choisi de telle sorte qu'il minimise, pour un problème unidimensionnel, la fonctionnelle

$$\int_x \left(\frac{1}{2l} d^2 + \frac{l}{2} |\nabla d|^2 \right) dx \quad (1.23)$$

avec les conditions aux limites $d = 1$ là où il y a une fissure et $\nabla d \cdot n = 0$ sur les bords du domaine.

La répartition de l'endommagement est ainsi vue comme un lissage de la position de la fissure, où $d = 1$. Le choix de la fonctionnelle permet de définir la forme de l'endommagement dans le cas d'un problème unidimensionnel avec une fissure localisée dans un matériau sain à l'infini. Dans [55], il est choisi d'avoir une répartition exponentielle de l'endommagement

$$d(x) = \exp(-|x|/l) \quad (1.24)$$

Cette approche considère donc une solution *a priori* de la forme de l'endommagement dans un cas particulier pour en déduire une fonctionnelle qui permettra par la suite de définir la valeur de l'endommagement dans un problème plus complexe.

La méthode d'endommagement par champ de phase introduit une longueur caractéristique, ici l , par le choix de la répartition de l'endommagement dans le cas unidimensionnel. Il impose aussi une nouvelle condition aux limites *naturelle* pour l'endommagement, $\nabla d \cdot n = 0$ qui peut être à l'origine de comportements indésirables sur les bords du domaine [23]. De plus, dans les simulations numériques de ce modèle, il est souvent conservé des propriétés mécaniques en traction dans le matériau complètement endommagé, afin d'éviter des problèmes numériques. Ainsi, la transition entre endommagement et fissuration n'est pas complètement abordée.

1.2.4 Méthode variationnelle

Les méthodes variationnelles se fondent sur un principe complètement différent. On ne cherche pas à écrire des conditions supplémentaires ou à écrire une faible non localité des relations classiques. Dans ces méthodes, une hypothèse majeure est faite : la solution du problème quasi-

statique d'endommagement minimise l'énergie du système. Cette hypothèse est classique en élasticité et a été introduite par A. Ehrlacher dans [29] pour l'étude des milieux à dissipation simple [21, 31].

L'énergie que minimise le problème peut s'écrire :

$$\mathcal{E}_t(\mathbf{u}, d) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \varepsilon(\mathbf{u}) : \mathbb{C}(d) : \varepsilon(\mathbf{u}) + kd \right) d\Omega - W^{ext}(\mathbf{u}) \quad (1.25)$$

Le premier terme, bien connu, correspond à l'énergie de déformation élastique. Le deuxième représente l'énergie dissipée par fissuration dans le matériau. Le principe variationnel s'écrit alors :

$$\forall (\dot{\mathbf{v}}, \dot{\beta}) \ll \text{admissibles} \gg, \quad \mathcal{E}'_t(\mathbf{u}_{sol}, d_{sol})(\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}_{sol}, \dot{\beta} - \dot{d}) \geq 0 \quad (1.26)$$

où $\mathcal{E}'_t(\mathbf{u}, d)(\dot{\mathbf{v}}, \dot{\beta})$ est la dérivée de \mathcal{E}_t suivant $(\dot{\mathbf{v}}, \dot{\beta})$ évaluée en (\mathbf{u}, d) à un instant t et les conditions d'admissibilité s'écrivent

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{u}}_d \text{ sur } \partial_d \Omega \quad (1.27)$$

$$\dot{\beta} \geq 0 \text{ dans } \Omega \quad (1.28)$$

Le problème de minimisation posé peut alors se résoudre numériquement par un algorithme de minimisation alternée après discrétisation « temporelle » du chargement.

Cette méthode permet une résolution simple dans l'ensemble du domaine. Cependant, une hypothèse très importante a été ajoutée au raisonnement : le problème d'endommagement est considéré comme étant global. Par ailleurs, le problème de minimisation peut s'avérer coûteux. Rien ne prouve que pour deux valeurs du chargement dans une même direction donnée, le résultat de l'analyse globale donne des zones endommagées emboîtées. Une condition de stabilité est nécessaire. Dans le cas des milieux à dissipation simple A. Ehrlacher a montré que cette condition est celle donnée par Bui *et al.* [20].

Cette approche a été largement étudiée par plusieurs auteurs, la forme de $\mathbb{C}(d)$ puis de la dissipation ont fait l'objet de plusieurs études [32]. L'introduction du gradient de l'endommagement et l'étude des singularités des fonctions [4] permet d'assurer des conditions d'existence et d'unicité.

1.3 Méthodes par front d'endommagement

Les méthodes par front d'endommagement considèrent l'évolution d'une surface dont la position pilote l'endommagement. Dans ce sens, il s'agit de méthodes locales ou partiellement non locales, où la non-localité ne peut exister que sur le front d'endommagement. Ailleurs, le problème est formulé sous une forme locale ce qui réduit notablement le coût de calcul par rapport

à des formulations non locales sur l'ensemble du domaine. Ces méthodes posent alors un nouveau problème qui est la description de l'évolution du front d'endommagement, c'est à dire du mouvement d'une surface. Différentes méthodes par front d'endommagement sont exposées dans ce chapitre. D'abord, le front d'endommagement simple [20] où l'endommagement s'établit de façon brutale. Ensuite une énergie de surface est ajoutée à la formulation [19]. Finalement, un modèle plus récent appelé *Thick Level Set* ou *TLS* où l'endommagement s'établit graduellement et non de façon brutale est introduit [60].

1.3.1 Front mince

On suppose dans une première approche que le front d'endommagement, séparant le domaine Ω en deux sous-domaines distincts de caractéristiques mécaniques différentes, un matériau sain et un matériau endommagé, est infiniment mince (cf. figure 1.7). C'est-à-dire que le matériau est brutalement endommagé au niveau de cette interface, que l'on notera Γ ; les champs mécaniques subissent des discontinuités. Ils conservent évidemment toutes leur propriétés de régularité dans le reste du domaine.

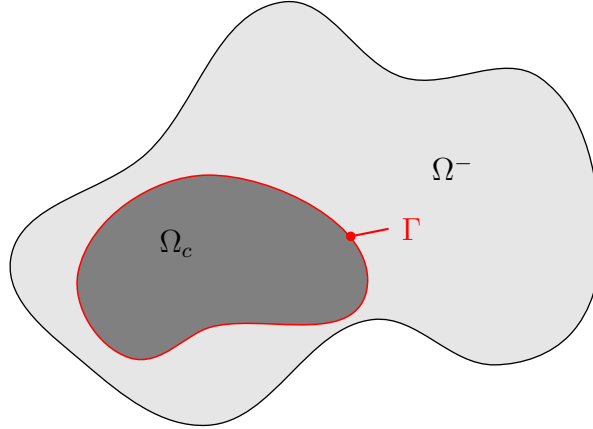


Figure 1.7 – Représentation de l'état d'endommagement d'un solide sous le modèle de front mince Le domaine sain Ω^- est séparé du milieu endommagé Ω_c par une frontière Γ , ici en rouge.

Le problème d'endommagement s'écrit comme un problème d'évolution d'un front d'endommagement, *i.e.* de l'interface Γ [3, 76, 77]. On s'intéresse à la dissipation d'énergie lors d'une variation infinitésimale du front :

$$\mathcal{D} = \int_{\Gamma} ([w]_{\Gamma} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot [\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_{\Gamma}) a \, d\Gamma = \int_{\Gamma} g(s) a(s) \, ds \quad (1.29)$$

où w est l'énergie volumique, n le vecteur normal extérieur à Γ , a le champ de vitesse normale

du front et

$$g = \llbracket w \rrbracket_\Gamma - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \llbracket \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma \quad (1.30)$$

Or, on peut par ailleurs écrire certaines conditions de continuité en Γ . En notant \mathbf{n}^T les vecteurs orthogonaux à \mathbf{n} ,

$$\llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket_\Gamma \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.31)$$

$$\llbracket \nabla \mathbf{u} \rrbracket_\Gamma \cdot \mathbf{n}^T = 0 \quad (1.32)$$

$$(1.33)$$

et alors l'expression du taux de restitution d'énergie g s'écrit

$$g = \llbracket w \rrbracket_\Gamma - \boldsymbol{\sigma} : \llbracket \nabla \mathbf{u} \rrbracket_\Gamma \quad (1.34)$$

La loi d'évolution peut s'écrire d'une façon similaire à celle du problème classique :

$$g - g_c \leq 0, \quad a \geq 0, \quad (g - g_c) \cdot a = 0 \quad (1.35)$$

où g_c est une valeur seuil.

Cette méthode présente un inconvénient majeur. À l'image du modèle local d'endommagement présenté dans 1.1.4, il existe un problème de bifurcation : la vitesse de propagation a n'est pas toujours unique. De nombreuses formulations variationnelles suivant le comportement local ont été proposées dans [20] et [77] et montrent l'applicabilité de la méthode sur des exemples étudiés de façon analytique. Si on prend le cas d'une sphère en traction, on s'attend à une évolution radiale du front d'endommagement. Cependant, on peut observer l'apparition d'une instabilité du front sous forme de lobes (cf. 1.8). Ce modèle permet cependant de donner un critère d'initiation d'un défaut infinitésimal fondé sur une analyse de stabilité-bifurcation [86].

1.3.2 Front mince avec énergie de surface

Afin de diminuer le nombre de bifurcations, on peut introduire une énergie de surface à l'interface entre le matériau sain et le matériau endommagé [19, 57, 64]. La dissipation s'écrit alors

$$\mathcal{D} = \int_\Gamma \left(g - \frac{\beta}{R} \right) a \, d\Gamma \quad (1.36)$$

où β est la densité d'énergie surfacique supposée constante et R le rayon de courbure local. La loi d'évolution devient

$$g \leq g_c + \frac{\beta}{R} \quad a \geq 0, \quad \left(g - \left(g_c + \frac{\beta}{R} \right) \right) \cdot a = 0 \quad (1.37)$$

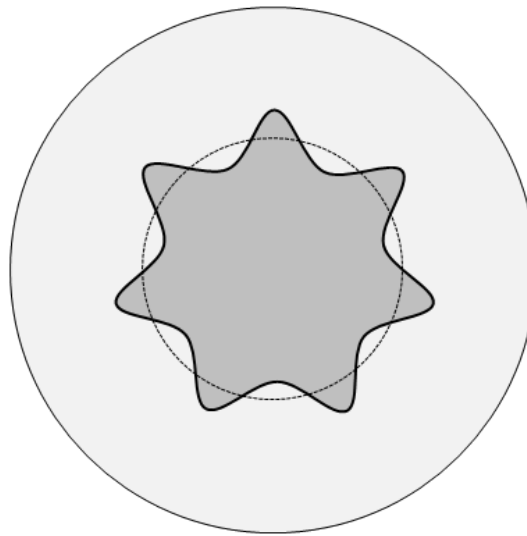


Figure 1.8 – Front d’endommagement sous forme de lobes. En gris clair, le matériau sain. En gris foncé le matériau endommagé. En trait plein, la frontière axysymétrique de la solution fondamentale.

On évite ainsi les rayons de courbure trop faibles et donc les solutions singulières.

Si on suppose, comme dans le problème d’initiation de fissures décrit dans la partie 1.3.1, que la zone endommagée est réduite à un point considéré comme une sphère infiniment petite, alors le rayon de courbure à sa surface est nul. Donc il faut une densité d’énergie infinie pour faire évoluer le front d’endommagement. Il est donc impossible avec ce modèle de représenter l’initiation d’un défaut infinitésimal.

1.3.3 Front épais

Afin de résoudre les problèmes décrits ci-dessus, une nouvelle approche est envisagée dans [60, 85]. Il s’agit d’introduire une longueur caractéristique dans le modèle comme dans les régularisations du modèle local d’endommagement (cf. partie 1.2), qui donnera une épaisseur au front d’endommagement (cf. figure 1.9). Dans l’épaisseur de la zone d’endommagement, la valeur de celui-ci ne dépendra que de la distance au front d’endommagement. Ce modèle peut être interprété comme une analyse à une plus petite échelle d’un milieu s’endommageant par le modèle de front mince, de la même façon que la différence entre un matériau fragile et quasi-fragile peut être vue comme un changement d’échelle. Ainsi, l’épaisseur du front d’endommagement serait négligeable lorsque la taille de la structure devient suffisamment grande et le comportement du couple matériau-structure suffisamment fragile. La modélisation du processus d’endommagement pourrait alors se réduire à un front mince. De plus, si on s’intéresse à la propagation

d'une zone endommagée rectiligne, un nouveau changement d'échelle pourrait nous conduire au modèle d'élasticité linéaire de la rupture (cf. 1.1.2).

On s'attachera dans cette partie à expliquer en détail les équations liées à ce modèle d'endommagement gradué dont l'analyse fait l'objet de ce travail. On se contente cependant de décrire le détail des équations dans le cas d'un comportement symétrique en traction et en compression par souci de simplicité.

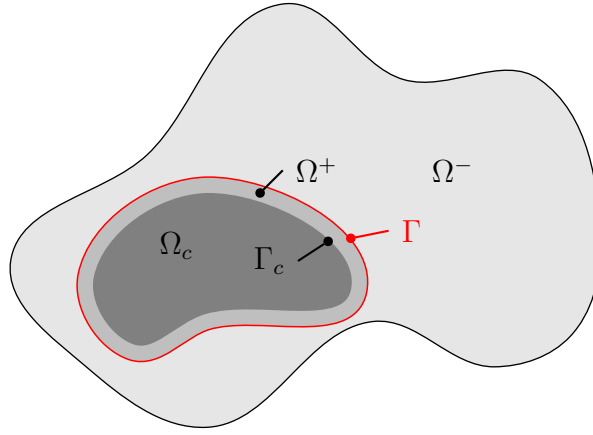


Figure 1.9 – Représentation de l'état d'endommagement d'un solide sous le modèle de front épais TLS. Le domaine sain Ω^- est séparé du milieu totalement endommagé Ω_c par une zone intermédiaire d'endommagement croissant Ω^+ . Celle-ci est séparée du milieu sain par la frontière Γ , ici en rouge. La frontière séparant la zone de transition de la zone totalement endommagée est notée Γ_c . Cette frontière est susceptible d'être un bord libre, dans le cas d'un endommagement total conduisant à un matériau sans propriétés mécaniques.

Rappelons tout d'abord l'expression de la densité d'énergie w

$$w(\varepsilon, d) = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}(d) : \varepsilon \quad (1.38)$$

et celles de la contrainte et du taux local de restitution d'énergie

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} = \mathbb{C}(d) \varepsilon \quad (1.39)$$

$$Y = -\frac{\partial w}{\partial d} = -\frac{1}{2} \varepsilon : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial d} : \varepsilon \quad (1.40)$$

On définit une fonction de niveau — *level-set* — notée ϕ [83] : la distance signée au front d'endommagement Γ . Elle est positive à l'intérieur de la zone endommagée et négative dans le matériau sain. Dans ce modèle, la valeur de la variable d'endommagement d ne dépend que de la valeur de la distance signée ϕ et d'une longueur caractéristique ℓ_c . Cette dépendance est

explicitée par un profil d'endommagement fixé *a priori*. Des exemples de profils sont donnés en

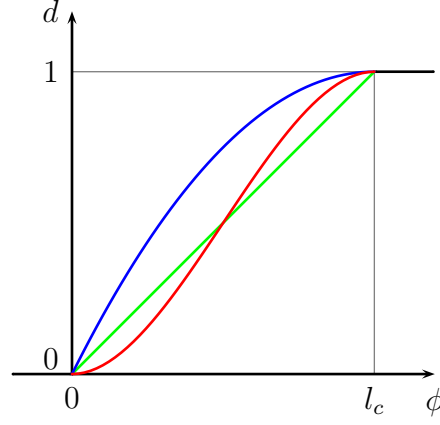


Figure 1.10 – Exemples de profils d'endommagement linéaire (vert), quadratique (bleu) et cubique (rouge).

figure 1.10. Le profil d'endommagement doit être croissant afin d'être thermodynamiquement acceptable, si l'on s'impose que le front d'endommagement ne peut pas reculer. De plus, on fixe les valeurs extrêmes. En notant $\hat{\phi} = \phi / \ell_c$, on a

$$d(\hat{\phi} \leq 0) = 0, \quad d(\hat{\phi} \geq 1) = 1 \quad \text{et} \quad d'(\hat{\phi}) \geq 0 \quad (1.41)$$

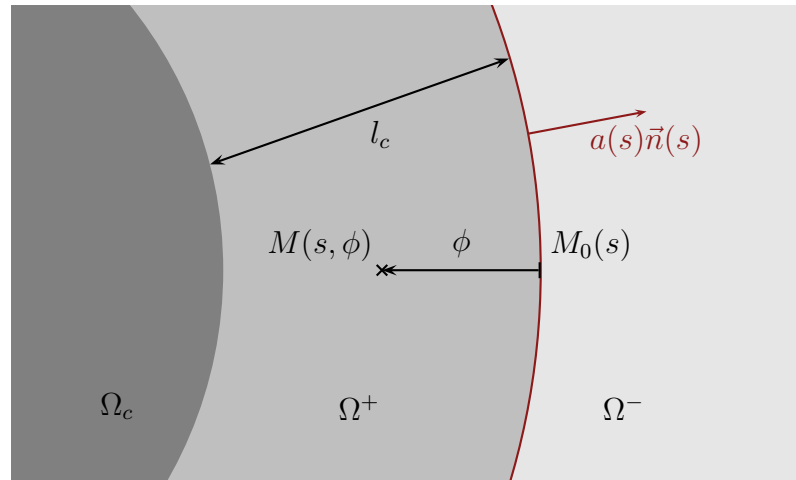


Figure 1.11 – Zone d'endommagement et notations. L'abscisse curviligne s décrit le front d'endommagement (pour un problème bidimensionnel).

La fonction de niveau choisie étant la distance signée, on peut écrire à tout instant

$$\|\nabla\phi\| = 1 \quad (1.42)$$

Notons $X_s \in \Gamma$ un point du front d'endommagement qui vérifie donc $\phi(X_s, t) = 0$. Tout point à la distance z du front d'endommagement Γ vérifie

$$\phi(X_s + z\mathbf{n}, t) = z \quad (1.43)$$

La dérivation temporelle de cette relation conduit à

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - a\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.44)$$

où a est la vitesse normale au front du pont X_s . On en déduit que tout point porté par \mathbf{n} a pour vitesse normale a (cf. figure 1.11). Écrivons la dissipation liée à l'avancement du front :

$$\mathcal{D} = \int_{\Gamma} \int_{\phi=0}^{\ell} Y d j d\phi ds = \frac{1}{\ell_c} \int_{\Gamma} a(s) \int_{\phi=0}^{\ell} Y d'(\hat{\phi}) j d\phi ds \quad (1.45)$$

où j est le jacobien de la transformation et ℓ est l'épaisseur de la zone endommagée. Si le critère d'endommagement local $f_{\text{CDM}} = Y - Y_c$ est vérifié en tout point, la dissipation s'écrit

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\ell_c} \int_{\Gamma} a(s) \int_{\phi=0}^{\ell} Y_c d'(\hat{\phi}) j d\phi ds = \frac{Y_c}{\ell_c} \int_{\Gamma} a(s) \int_{\phi=0}^{\ell} d'(\hat{\phi}) j d\phi ds \quad (1.46)$$

L'égalité de ces deux expressions de la dissipation conduit au choix du critère d'endommagement TLS suivant :

$$f_{\text{TLS}} = \frac{\int_{\phi=0}^{\ell} f_{\text{CDM}}(Y, d) j d'(\hat{\phi}) d\phi}{\int_{\phi=0}^{\ell} j d'(\hat{\phi}) d\phi} \quad (1.47)$$

Dans le cas classique où le critère local vaut $f_{\text{CDM}} = (Y - Y_c)$, la loi d'évolution peut s'écrire sous la forme

$$\bar{Y} - \bar{Y}_c = 0 \quad (1.48)$$

avec, pour toute grandeur X ,

$$\bar{X} = \frac{\int_{\phi=0}^{\ell} X j d'(\hat{\phi}) d\phi}{\int_{\phi=0}^{\ell} j d'(\hat{\phi}) d\phi} \quad (1.49)$$

Cette notation sera couramment utilisée dans la suite.

L'épaisseur ℓ de la zone d'endommagement, dont la valeur est comprise entre 0 et ℓ_c , évolue au fur et à mesure que la zone endommagée s'établit. Lorsque la valeur de la distance signée ϕ

dépasse ℓ_c , l'intégrande est nulle car $d' = 0$. Il est important de remarquer que lorsque ℓ tend vers 0, f_{TLS} tend vers le critère local f_{CDM} . Ainsi, dès l'apparition d'une zone endommagée de taille presque nulle, le critère d'endommagement peut être utilisé et le modèle TLS est cohérent avec le modèle d'endommagement local. On peut considérer que le critère f_{TLS} n'est défini que sur la surface d'endommagement et qu'à chaque point de cette surface correspond une valeur du critère. Cette valeur ne dépend que des grandeurs associées à une zone de mesure nulle, un segment, que le problème soit en deux ou trois dimensions. La loi d'évolution associée s'écrit donc en fonction de la vitesse normale a du point du front associé au critère.

$$\begin{cases} f_{\text{TLS}} \leq 0 \\ a \geq 0 \\ f_{\text{TLS}} a = 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

Une fois la loi d'évolution de l'endommagement définie, on s'attache dans la suite à donner quelques exemples de fonctions d'adoucissement utilisées dans ces travaux.

1.3.3.1 Choix de la fonction d'adoucissement

L'intérêt d'introduire un comportement adoucissant dans le cadre de la TLS a été initialement montré dans [61, 90]. On choisit d'écrire la fonction d'adoucissement sous une forme adimensionnelle en posant

$$Y_c = Y_c^0 h(d) \quad (1.51)$$

Il est possible de visualiser cette fonction en traçant la réponse d'une barre homogène et s'endommageant de façon homogène sous le modèle d'endommagement local. De telles courbes sont représentées en figure 1.12 pour les fonctions d'adoucissement décrites ci-dessous.

Comportement fragile La fonction d'adoucissement h la plus simple que l'on puisse considérer est la fonction unitaire : $h = 1$.

Adoucissement/durcissement linéaire La fonction d'adoucissement h est affine par rapport à l'endommagement : $h = 1 + kd$ où k est un paramètre. La valeur $k = 2$ est charnière entre un comportement adoucissant $k \leq 2$ et durcissant $k > 2$.

Issue du modèle cohésif Cette famille de fonctions sera présentée dans la partie 5. Sa capacité à représenter les résultats expérimentaux sera mise en évidence dans la partie 6.

Dans le modèle d'endommagement gradué par front mobile TLS, il est donc possible de suivre toute l'évolution d'une zone endommagée dès lors que l'on s'autorise l'initiation d'une zone endommagée infiniment petite lorsque, dans le matériau sain, lorsque le seuil d'endommagement $Y - Y_c = 0$ est atteint. De plus, l'épaisseur de la zone endommagée est en mesure de

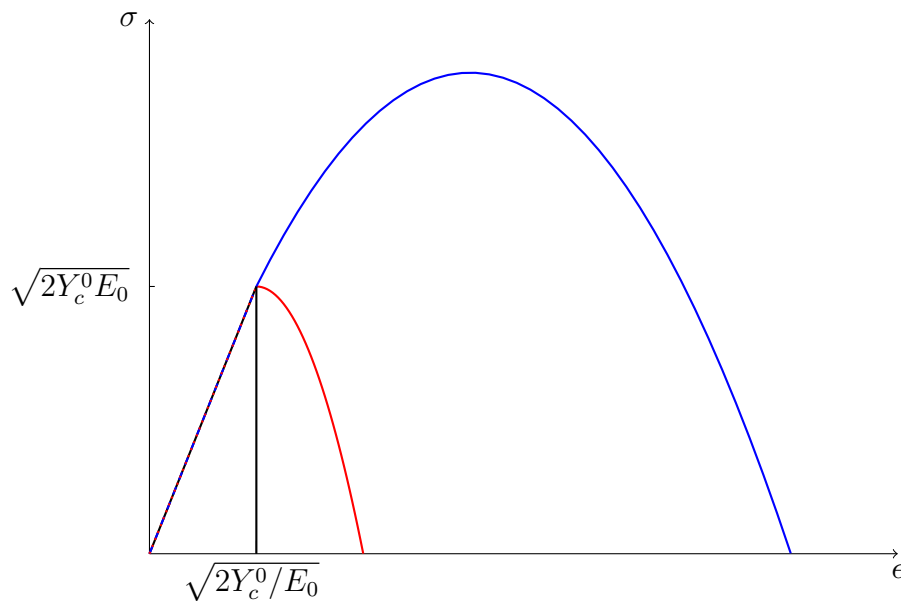


Figure 1.12 – Représentation graphique des fonctions d’adoucissement : courbes de comportement de barres soumises à un chargement de traction monotone s’endommageant selon le modèle local et de façon homogène. En noir, un comportement fragile $h = 1$; en rouge et en bleu deux comportements dits *linéaires*, pour des coefficients égaux à 2 et 5 respectivement.

garantir l’unicité de la solution sur une certaine plage de chargement comme il sera prouvé dans la suite, à l’image du modèle par front avec énergie de surface. Finalement, le modèle TLS ne présente qu’une faible non localité puisque celle-ci est restreinte à la zone endommagée et suivant des segments. Il apparaît donc comme un bon candidat pour résoudre des problèmes d’ingénierie d’endommagement, et en particulier de matériaux quasi-fragiles.

La version du modèle TLS présentée dans cette partie n’est qu’un cas particulier du modèle tel qu’il existe aujourd’hui. En effet, des extensions pour la modélisation de matériaux élasto-plastiques endommageables ou des structures présentant un endommagement diffus ayant pour origine un comportement local durcissant ont été mis en place en parallèle de ces travaux [61]. De plus, des études dynamiques ont aussi été menées [59].

CHAPITRE 2

ÉTUDES PRÉLIMINAIRES SUR DES STRUCTURES SOUS CHARGEMENT QUASI-STATIQUE

Dans cette partie, on s'intéresse à la comparaison du modèle d'endommagement par front mince et du modèle d'endommagement gradué par front épais TLS. Cette comparaison est menée par le biais de trois études analytiques. Les deux premières concernent la réponse globale d'une structure sous un chargement quasi-statique ; d'abord pour un endommagement total avec des propriétés mécaniques résiduelles et ensuite pour un endommagement total entraînant la ruine de la structure. Dans la troisième partie, on s'intéresse à l'unicité de la solution et donc aux possibilités de bifurcation dans le trajet d'endommagement.

2.1 Comportement macroscopique de structures sans rupture $E_d \neq 0$

Trois cas sont traités : une barre en traction, un cylindre et une sphère en traction radiale. Ces deux derniers sont présentés en annexe. D'abord, leur comportement macroscopique est analysé sous le modèle d'endommagement par front mince. Ensuite, une analyse sous le modèle TLS est menée pour les mêmes géométries et chargements.

2.1.1 Front d'endommagement mince

L'état d'endommagement du solide est caractérisé par la position du front d'endommagement. La réponse macroscopique ne dépend donc que des caractéristiques du matériau sain et endommagé et de la position du front d'endommagement. Il est important de signaler que ce modèle introduit des discontinuités dans les champs mécaniques : l'endommagement est en fait une propagation d'un front de discontinuité d'endommagement — passage brutal de 0 à 1 — et de déformations.

2.1.1.1 Courbe de comportement

La courbe de comportement du solide lors d'un chargement monotone croissant peut être séparée en trois phases que l'on numérote I, III et V par cohérence avec l'étude du front épais dans le chapitre suivant.

I - Comportement élastique sain

III - Déplacement du front d'endommagement

V - Comportement élastique endommagé

Le comportement lors de ces différentes phases est déterminé pour chacune des géométries proposées.

2.1.1.2 Cas d'une barre soumise à une extension uniforme

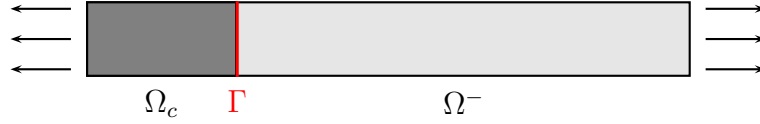


Figure 2.1 – Barre en traction s'endommageant suivant le modèle de front mince. La zone saine Ω^- (gris clair) est séparée de la zone endommagée Ω_c (gris foncé) par le front d'endommagement Γ (en rouge).

Considérons une barre de longueur L , représentée en figure 2.1, et soumise à une extension moyenne Δ . La barre est fixée en 0 et le déplacement en L est $u(L) = L\Delta$. On suppose que le front d'endommagement apparaît en 0 et se propage vers les abscisses croissantes et on note γ sa position. On note Σ l'effort normal dans la barre. L'état d'équilibre de la barre indique que $\sigma(L) = \sigma(x) = \Sigma$. On suppose un comportement classique d'élasticité linéaire suivant la loi de Hooke unidimensionnelle. Ainsi, en tout point d'abscisse x

$$\sigma = E_i \varepsilon(x) \quad \text{avec } i = s \text{ ou } d. \quad (2.1)$$

donc le comportement pendant les phases élastiques I et V est :

$$\begin{cases} \Sigma = E_s \varepsilon(x) & \text{pour } x < \gamma \text{ i.e. pour la phase } I \text{ et} \\ \Sigma = E_d \varepsilon(x) & \text{pour } x > \gamma \text{ i.e. pour la phase } V. \end{cases} \quad (2.2)$$

Le critère d'évolution $g - g_c \leq 0$ donné en (1.34) s'écrit

$$g - g_c = \llbracket w \rrbracket_\Gamma - (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \llbracket \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma - g_c = \frac{1}{2} \Sigma^2 \left(\frac{1}{E_d} - \frac{1}{E_s} \right) - g_c \quad (2.3)$$

Le front se propage donc à effort normal Σ constant. L'extension Δ du solide biphasé est donnée par

$$\Delta = \frac{1}{L} \int_{x=0}^L \varepsilon \, dx = \left(\frac{1}{E_s} + \frac{\gamma}{L} \left(\frac{1}{E_d} - \frac{1}{E_s} \right) \right) \Sigma. \quad (2.4)$$

La réponse macroscopique de la barre est représentée en figure 2.2.

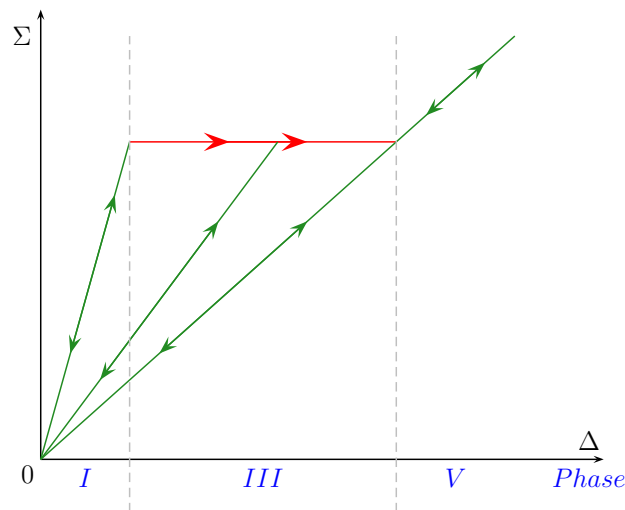


Figure 2.2 – Comportement d’une barre en extension sous le modèle d’endommagement par front mince. Les parties vertes correspondent aux chargements et déchargements élastiques. L’évolution de l’endommagement a lieu sur la partie rouge.

2.1.2 Front d’endommagement épais TLS

On s’intéresse à présent à la même barre de comportement décrit par un modèle d’endommagement gradué par front épais TLS et présenté dans la partie 1.3.3. Ainsi, le solide est composé de trois sous-domaines représentés dans la figure 2.3 : deux homogènes — l’un sain Ω^- et l’autre endommagé Ω_c — et une zone de transition Ω^+ non-homogène d’épaisseur ℓ où le module de Young est continu. Cependant, les propriétés du matériau ne présentent pas de discontinuités entre les différentes phases ni dans la zone non-homogène.

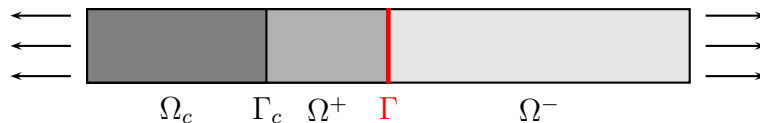


Figure 2.3 – Barre en traction s’endommageant suivant le modèle de front épais TLS. La zone saine Ω^- (gris clair) est séparée de la zone endommagée Ω_c (gris foncé) par la zone d’endommagement (gris intermédiaire). Cette zone est délimitée, d’une part par le front d’endommagement Γ (en rouge), et d’autre part par la frontière Γ_c (en noir).

2.1.2.1 Courbe de comportement

On choisit de se placer dans le cas où la taille de la structure — L pour la barre et R_e pour le cylindre ou la sphère — est plus grande que la longueur caractéristique de la zone d'endommagement ℓ_c . Ainsi, la zone de transition Ω^+ ne peut pas occuper l'ensemble du solide. Il existe alors cinq phases distinctes au cours du chargement de la structure. À la première phase, où le matériau est sain et son comportement est élastique, suit l'apparition de la zone endommagée Ω^+ dont la taille ℓ est initialement presque nulle : $\ell = 0^+$. Ensuite, le front d'endommagement se propage jusqu'à ce que son épaisseur atteigne $\ell = \ell_c$. Une fois établie, la zone endommagée se propage jusqu'à ce que le front atteigne le bord de la barre. La troisième phase prend alors fin et commence la quatrième, au cours de laquelle la zone de transition disparaît. Sa taille décroît donc de $\ell = \ell_c$ à 0. Finalement, une nouvelle phase d'élasticité a lieu lorsque tout le matériau est totalement endommagé. L'épaisseur de la zone endommagée au cours du chargement et des phases est représenté en figure 2.4 où les cinq phases sont :

I - Comportement élastique sain

II - Apparition de la zone d'endommagement

III - Avancée de la zone d'endommagement

IV - Disparition de la zone d'endommagement

V - Comportement élastique endommagé

La numérotation de ces phases est cohérente avec celle de la partie précédente concernant l'évolution d'un front mince.

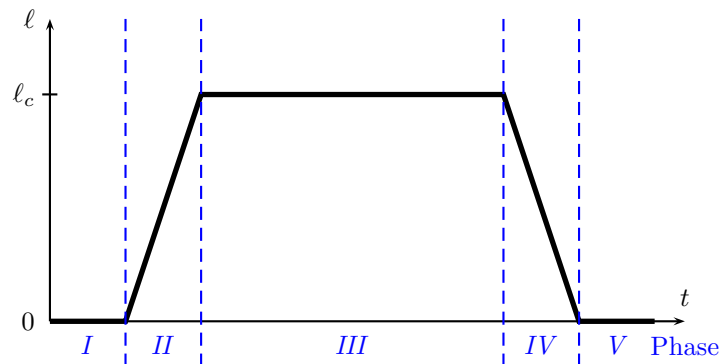


Figure 2.4 – Épaisseur de la zone endommagée ℓ au cours de l'avancée du front γ .

2.1.2.2 Modèle d'endommagement à endommagement total sans rupture

Le modèle d'endommagement TLS nécessite la définition du comportement du matériau dans la zone de transition Ω^+ : il ne suffit plus des caractéristiques du matériau sain et endommagé pour connaître le comportement élastique de la structure pour toutes les positions de front d'endommagement. Classiquement, on choisit de déterminer les propriétés mécaniques du matériau en fonction de la variable d'endommagement d et dans le cadre TLS on fixe la dépendance de d à la distance signée ϕ au front Γ . Ici, afin de simplifier la résolution analytique des équations, il est préféré d'exprimer les propriétés mécaniques directement en fonction de la distance au front ϕ . On en déduira, par le profil d'endommagement TLS $d(\hat{\phi})$ choisi, les propriétés d'élasticité en fonction de l'endommagement.

Ayant imposé dans le modèle que $d \geq 0$, le profil d'endommagement $d(\hat{\phi})$ doit vérifier une condition d'admissibilité correspondant à l'irréversibilité de l'endommagement, donc $d'(\hat{\phi}) > 0$. À cette condition près, tous les choix de profils sont admissibles. On se contente ici de considérer un profil d'endommagement linéaire puis un deuxième plus complexe.

Profil d'endommagement linéaire

$$\begin{cases} d(\hat{\phi}) = 0 & \text{si } \hat{\phi} \leq 0 & \text{i.e. dans } \Omega^- \\ d(\hat{\phi}) = \hat{\phi} & \text{si } 0 \leq \hat{\phi} \leq 1 & \text{i.e. dans } \Omega^+ \\ d(\hat{\phi}) = 1 & \text{si } \hat{\phi} \geq 1 & \text{i.e. dans } \Omega_c \end{cases} \quad (2.5)$$

Deuxième profil d'endommagement

$$\begin{cases} d(\hat{\phi}) = 0 & \text{si } \hat{\phi} \leq 0 & \text{i.e. dans } \Omega^- \\ d(\hat{\phi}) = \hat{\phi} \left(1 + \chi - \chi \hat{\phi}^{\frac{1}{\chi}} \right) & \text{si } 0 \leq \hat{\phi} \leq 1 & \text{i.e. dans } \Omega^+ \\ d(\hat{\phi}) = 1 & \text{si } \hat{\phi} \geq 1 & \text{i.e. dans } \Omega_c \end{cases} \quad (2.6)$$

Rappelons le critère d'avancée du front d'endommagement donné en 1.3.3 : l'avancée se produit lorsque f_{TLS} s'annule. On admet ici $f_{\text{CDM}} = Y - Y_c$ avec Y_c constant. Ainsi

$$f_{\text{TLS}} = \frac{\int_{\phi=0}^{\ell} Y j d'(\hat{\phi}) d\phi}{\int_{\phi=0}^{\ell} d'(\hat{\phi}) d\phi} - Y_c \quad (2.7)$$

2.1.2.3 Cas d'une barre soumise à une extension uniforme

La réponse d'une barre soumise à une extension uniforme a été étudiée dans [85]. Rappelons l'hypothèse de comportement et quelques résultats. On suppose un comportement linéaire sur la

bande d'endommagement pour l'inverse du module de Young.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{1}{E} \right) (\hat{\phi}) = \frac{1}{E_s} & \text{si } \hat{\phi} \leq 0 \quad i.e. \text{ dans } \Omega^- \\ \left(\frac{1}{E} \right) (\hat{\phi}) = \frac{1}{E_s} + \hat{\phi} \left(\frac{1}{E_d} - \frac{1}{E_s} \right) & \text{si } 0 \leq \hat{\phi} \leq 1 \quad i.e. \text{ dans } \Omega^+ \\ \left(\frac{1}{E} \right) (\hat{\phi}) = \frac{1}{E_d} & \text{si } \hat{\phi} \geq 1 \quad i.e. \text{ dans } \Omega_c \end{array} \right. \quad (2.8)$$

2.1.2.4 Équations d'équilibre

On encastre une extrémité de la barre $u(0) = 0$ et on impose un déplacement $u(L) = \Delta L$ à l'autre extrémité. On note Σ la contrainte de traction uniforme dans la barre. L'intégration de la déformation sur la barre fournit, par l'intermédiaire de la distribution de raideur dans le profil (2.8), l'extension totale

$$\Delta = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{dx}{E(x)} \Sigma = \frac{\Sigma}{L} \left[\frac{L}{E_s} + \frac{\ell_c}{2} \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E_d} \right) + \gamma \left(\frac{1}{E_d} - \frac{1}{E_s} \right) \right] \quad (2.9)$$

Le taux de restitution d'énergie local s'exprime

$$Y(x) = \frac{\Sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{1}{E} \right) = \frac{\Sigma^2}{2} \left(\frac{1}{E_d} - \frac{1}{E_s} \right) \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial d} \quad (2.10)$$

qui est indépendant (respectivement dépendant) de la position dans la barre pour le profil d'endommagement linéaire (resp. pour le deuxième profil d'endommagement).

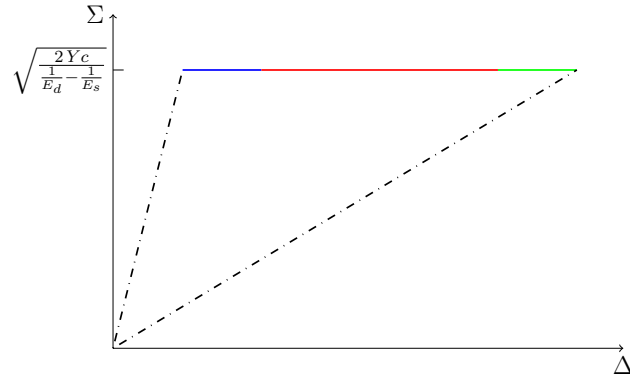
L'avancée du front d'endommagement se produit lorsque le critère f_{TLS} vaut zéro avec

$$f_{\text{TLS}} = \frac{\int_{\hat{\phi}=0}^{\ell} Y d'(\hat{\phi}) d\phi}{\int_{\hat{\phi}=0}^{\ell} d'(\hat{\phi}) d\phi} - Y_c \quad (2.11)$$

car la courbure du front est nulle dans le cas de la barre. Lorsque $\ell = \ell_c$, la dissipation est identique à celle du front mince. Le comportement macroscopique de la barre est tracé en figure 2.5 pour les deux profils d'endommagement.

Conclusion

Deux profils d'endommagement TLS ont été étudiés dans le cas unidimensionnel de la barre. En annexe, sont traités les cas d'un cylindre et d'une sphère en extension radiale avec des résultats proches de ceux de la barre. On observe un comportement macroscopique similaire pour le modèle d'endommagement par front mince et pour le modèle à endommagement gradué, voire identique dans le cas particulier du profil d'endommagement linéaire et d'une évolution spatiale



(a) Profil d'endommagement linéaire.

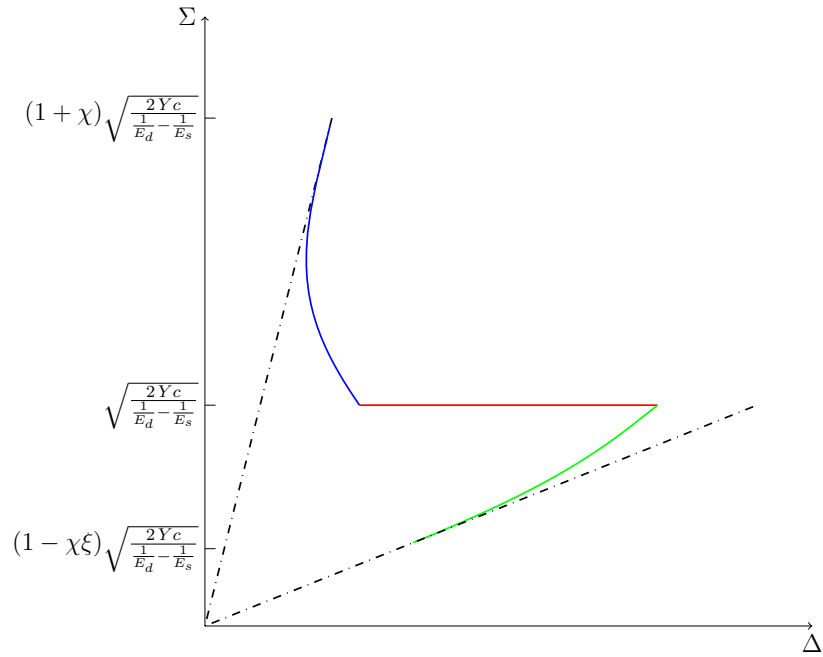
(b) Deuxième profil d'endommagement ($\chi = 1,3$ et $\xi = 0,5$).

Figure 2.5 – Comportement d'une barre en extension pour le modèle d'endommagement à transition continue TLS ($\ell_c/L = 0,4$). En trait mixte noir les comportements élastiques sain (phase I) et endommagé (phase V). En bleu, le développement de la zone d'endommagement (phase II), en rouge, son avancée avec une taille fixe ℓ_c (phase III) et en vert, sa disparition (phase IV).

linéaire de l'inverse du module de Young. Ces deux modèles peuvent donc fournir les mêmes résultats. Cependant, le modèle à transition continue permet une plus grande liberté dans la modélisation du comportement du solide. Ce modèle introduit aussi la possibilité de faire apparaître des instabilités dans le comportement macroscopique sous un chargement d'extension croissante

par l'existence de *snap-backs*.

Seul a été considéré ici le cas d'un endommagement total sans rupture. Dans la suite est présenté le cas d'une barre atteignant la rupture à la fin de la phase II. De plus, on ne s'est pas intéressé aux possibilités de bifurcation de la solution fondamentale par la perte d'unicité du problème d'évolution. La partie 2.3 traite ce problème pour un cylindre en torsion.

2.2 Comportement macroscopiques d'une structure avec rupture $E_d = 0$

On s'intéresse à une barre de longueur $L > \ell_c$ soumise à un chargement de traction comme dans la partie précédente. Cependant, on suppose ici un comportement différent, plus proche des modélisations de matériaux quasi-fragiles comme celles qui seront menées dans la suite. On exprime le module de Young E en fonction de l'endommagement d et celui-ci dépend de la fonction de niveau ϕ . On pose

$$E(d) = (1 - d)E^0 \quad (2.12)$$

Ainsi, la raideur du matériau totalement endommagé est nulle : $E_d = 0$. Il en résulte un comportement différent. Seules les deux premières phases du comportement existent. D'abord, une phase d'élasticité a lieu. Ensuite, le front d'endommagement apparaît et se propage jusqu'à ce la bande d'endommagement atteigne une épaisseur de ℓ_c . La contrainte Σ , toujours uniforme dans la barre, est alors nulle et la barre casse. On note Δ l'elongation moyenne de la barre.

2.2.0.4.1 Phase d'élasticité Avant que la charge n'atteigne $\Sigma = \sqrt{2E^0 Y_c^0}$, le comportement est élastique : $\Sigma = E^0 \Delta$.

2.2.0.4.2 Phase de propagation On suppose que l'endommagement s'initie à l'extrémité $x = 0$ et on note ℓ la position du front d'endommagement. La déformation moyenne s'écrit

$$\Delta = \frac{\Sigma}{LE^0} \left[(L - \ell) + \int_0^\ell \frac{1}{1 - d(\hat{\phi})} d\phi \right] \quad (2.13)$$

et le taux de restitution d'énergie local vaut

$$Y = \frac{1}{2} \frac{\Sigma^2}{E^0} \frac{1}{(1 - d)^2} \quad (2.14)$$

alors

$$\bar{Y} = \frac{1}{2} \frac{\Sigma^2}{E^0} \frac{\int_0^\ell \frac{d'(\hat{\phi}) d\phi}{(1 - d(\hat{\phi}))^2}}{d(\ell/\ell_c)} = \frac{1}{2} \frac{\Sigma^2}{E^0} \frac{1}{1 - d(\ell/\ell_c)} \quad (2.15)$$

L'évolution de l'endommagement se produit donc lorsque

$$\Sigma^2 = 2Y_c^0 E^0 (1 - d(\ell/\ell_c)) \quad (2.16)$$

Supposons à présent que le profil d'endommagement vérifie

$$1 - d(\hat{\phi}) = (1 - \hat{\phi})^\beta \quad (2.17)$$

afin d'étudier l'influence du comportement autour de $(\hat{\phi}, d) = (1; 1)$. La déformation moyenne s'écrit

$$\begin{cases} \Delta = \frac{1}{L} \left(\frac{2Y_c^0}{E^0} \right)^{\frac{1}{2}} (1 - \ell/\ell_c)^{\frac{\beta}{2}} \left[(L - \ell) + \frac{\ell_c}{\beta - 1} \left((1 - \ell/\ell_c)^{1-\beta} - 1 \right) \right] & \text{pour } \beta \neq 1 \\ \Delta = \frac{1}{L} \left(\frac{2Y_c^0}{E^0} \right)^{\frac{1}{2}} (1 - \ell/\ell_c)^{\frac{1}{2}} [(L - \ell) - \ell_c \ln(1 - \ell/\ell_c)] & \text{pour } \beta = 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

L'hypothèse $\ell_c < L$ fournit $(L - \ell) \neq 0$ et permet d'écrire

$$\begin{cases} \Delta \underset{\ell \rightarrow \ell_c}{\sim} \left(\frac{2Y_c^0}{E^0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\ell_c}{L} \frac{1}{\beta - 1} (1 - \ell/\ell_c)^{1-\frac{\beta}{2}} & \text{pour } \beta \neq 1 \\ \Delta \underset{\ell \rightarrow \ell_c}{\sim} \left(\frac{2Y_c^0}{E^0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\ell_c}{L} (1 - \ell/\ell_c)^{\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{1}{1 - \ell/\ell_c} \right) & \text{pour } \beta = 1 \end{cases} \quad (2.19)$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \Delta \underset{\ell \rightarrow \ell_c}{\rightarrow} 0 & \text{si } \beta < 2 \\ \Delta \underset{\ell \rightarrow \ell_c}{\rightarrow} \Delta_{\text{final}} \neq 0 & \text{si } \beta = 2 \\ \Delta \underset{\ell \rightarrow \ell_c}{\rightarrow} +\infty & \text{si } \beta > 2 \end{cases} \quad (2.20)$$

La seule valeur de β qui permet d'avoir une déformation moyenne non nulle et finie, et donc une élongation à rupture non nulle et finie, est $\beta = 2$. Ce résultat provient du comportement pour d proche de 1. Ainsi, ce type de profils sera privilégié dans la suite. On verra dans la partie 6 que ce choix est justifié par des observations expérimentales et par des simulations avec des modèles dits *mesoscopiques*.

2.3 Étude de stabilité et de bifurcation de trajets d'endommagement

Dans cette partie, on s'intéresse aux éventuelles bifurcations des solutions d'évolution d'un front d'endommagement. En effet, mis à part la bifurcation due à l'apparition d'un nouveau front d'endommagement, il est possible que l'évolution d'un front ne soit pas unique. On s'intéresse d'abord au cas d'un cylindre soumis à un chargement de torsion. La solution fondamentale de

propagation du front d'endommagement se fait sans gauchissement. On étudie ici la possibilité de bifurcation de cette solution fondamentale, en permettant une évolution non axisymétrique du front. On commence par rappeler l'étude faite en 1991 par Pradeilles-Duval et Stolz [76] concernant un front mince. On analyse ensuite le même cas avec un front épais.

2.3.1 Étude préliminaire

On se place dans le cadre de l'endommagement d'un cylindre soumis à de la torsion. On suppose que le front d'endommagement est initialement cylindrique et qu'il évolue de façon non axisymétrique à partir d'un certain moment avec une vitesse $a(\theta)$. Déterminons tout d'abord la réponse élastique du cylindre pour une position du front d'endommagement donnée et supposant celui-ci axisymétrique. On s'intéressera ensuite aux possibilités d'évolution non-axisymétriques du front à partir de cette position.

La description de la vitesse d'avancée non-axisymétrique du front est faite par une décomposition en série de Fourier de la vitesse normale au front

$$a(\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)). \quad (2.21)$$

2.3.1.1 Équations d'équilibre

2.3.1.1.1 Front mince On suppose que le champ de déplacement est de la forme

$$\mathbf{u} = \Psi r z \mathbf{e}_\theta + \eta(r) \mathbf{e}_z, \quad (2.22)$$

où $\eta(r)$ représente un gauchissement. De plus, on suppose que le déplacement est nul au centre : $\eta(0) = 0$.

L'équilibre et les conditions de continuité et aux limites s'écrivent, pour la modélisation de l'endommagement par front mince :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{équilibre :} & \Delta \eta & = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \cup \Omega_d \\ \text{conditions aux limites :} & \frac{d\eta_d}{dr} & = 0 \quad \text{en } r = R_e \\ & \eta_d & = 0 \quad \text{en } r=0 \\ & \frac{d\eta_d}{dr} & = 0 \quad \text{en } r=0 \\ \text{continuité à l'interface :} & \mu_d \frac{d\eta_d}{dr} & = \mu_s \frac{d\eta_s}{dr} \quad \text{en } r = \ell \\ & \eta_d & = \eta_s \quad \text{en } r = \ell \end{array} \right. \quad (2.23)$$

La seule solution à ce problème est nulle, *i.e.* $\eta_s = \eta_d = 0$. Il ne peut donc pas y avoir de gauchissement si la solution est axisymétrique.

Intéressons nous à présent à l'introduction d'une vitesse d'avancée du front non-axisymétrique et à la vitesse de gauchissement induite. On peut écrire

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\Psi} r z \mathbf{e}_\theta + \dot{\eta}(r, \theta) \mathbf{e}_z, \quad (2.24)$$

et le problème d'évolution s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{lll} \textbf{équilibre :} & \Delta \dot{\eta} & = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \cup \Omega_d \\ \textbf{conditions aux limites :} & \frac{\partial \dot{\eta}_d}{\partial r} & = 0 \quad \text{en } r = R_e \\ & \dot{\eta}_d & = 0 \quad \text{en } r = 0 \\ \textbf{continuité à l'interface :} & \left[\left[\mu \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial r} \right] \right]_\Gamma & = \Psi [\mu]_\Gamma \ell \frac{\partial a}{\partial s} \quad \text{en } r = \ell \\ & \dot{\eta}_d & = \dot{\eta}_s \quad \text{en } r = \ell \end{array} \right. \quad (2.25)$$

avec

$$\Delta \dot{\eta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \mu \frac{\partial^2 \dot{\eta}}{\partial \theta^2} \quad (2.26)$$

Le coefficient de cisaillement étant uniforme, la solution à l'équation d'équilibre est de la forme

$$\dot{\eta}(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left((A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos(n\theta) + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin(n\theta) \right). \quad (2.27)$$

En appelant X_n^i les constantes X_n de $\dot{\eta}$ pour i valant s dans le matériau sain et d dans le

matériau endommagé, les conditions aux limites et de continuité se traduisent par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{s, d\}, \quad A_0^i = B_0^i = 0, \\ \quad \quad \quad A_1^i = B_1^i = 0, \\ \quad \quad \quad C_1^i = D_1^i = 0; \\ \quad \quad \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0; \\ \forall n \geq 2, \quad A_n^s = \Psi \beta_n \frac{(\mu_s - \mu_d)^{\ell^{n+1}}}{\mu_s(R_e^{2n} + a^{2n}) + \mu_d(R_e^{2n} - a^{2n})} \\ \quad \quad \quad C_n^s = -\Psi \alpha_n \frac{(\mu_s - \mu_d)^{\ell^{n+1}}}{\mu_s(R_e^{2n} + a^{2n}) + \mu_d(R_e^{2n} - a^{2n})} \\ \quad \quad \quad B_n^s = \Psi \beta_n \frac{(\mu_s - \mu_d)^{\ell^{n+1}} R_e^{2n}}{\mu_s(R_e^{2n} + a^{2n}) + \mu_d(R_e^{2n} - a^{2n})} \\ \quad \quad \quad D_n^s = -\Psi \alpha_n \frac{(\mu_s - \mu_d)^{\ell^{n+1}} R_e^{2n}}{\mu_s(R_e^{2n} + a^{2n}) + \mu_d(R_e^{2n} - a^{2n})} \\ \quad \quad \quad A_n^d = \Psi \beta_n \frac{(\mu_s - \mu_d)^{\ell^{1-n}} (R_e^{2n} - a^{2n})}{\mu_s(R_e^{2n} + a^{2n}) + \mu_d(R_e^{2n} - a^{2n})} \\ \quad \quad \quad C_n^d = -\Psi \alpha_n \frac{(\mu_s - \mu_d)^{\ell^{1-n}} (R_e^{2n} - a^{2n})}{\mu_s(R_e^{2n} + a^{2n}) + \mu_d(R_e^{2n} - a^{2n})} \\ \quad \quad \quad B_n^d = 0 \\ \quad \quad \quad D_n^d = 0 \end{array} \right. \quad (2.28)$$

2.3.1.1.2 Front épais Afin de pouvoir résoudre facilement l'équation différentielle, on suppose que le coefficient de cisaillement μ varie de façon linéaire dans le front d'endommagement entre les valeurs μ_s et μ_d sur une longueur ℓ_c . On pose donc, dans le front d'endommagement Ω_t ,

$$\mu(\hat{\phi}) = \mu_s + \hat{\phi}(\mu_d - \mu_s), \quad (2.29)$$

soit

$$\mu(r) = \mu_s + \frac{r - \ell}{\ell_c}(\mu_s - \mu_d). \quad (2.30)$$

La solution à l'équation différentielle est alors

$$\dot{\eta}(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left((A_n F_n^A(r) + B_n F_n^B(r)) \cos(n\theta) + (C_n F_n^A(r) + D_n F_n^B(r)) \sin(n\theta) \right) \quad (2.31)$$

où les F_n^i sont les fonctions hypergéométriques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_n^A = {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} \left(1 + 2n - \sqrt{1 + 4n^2} \right); \frac{1}{2} \left(1 + 2n + \sqrt{1 + 4n^2} \right); 1 + 2n; - \left(\frac{r}{\frac{\mu_s}{\mu_s - \mu_d} \ell_c - \ell} \right) \right) r^n \\ F_n^B = {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} \left(1 - 2n - \sqrt{1 + 4n^2} \right); \frac{1}{2} \left(1 - 2n + \sqrt{1 + 4n^2} \right); 1 - 2n; - \left(\frac{r}{\frac{\mu_s}{\mu_s - \mu_d} \ell_c - \ell} \right) \right) r^{-n} \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Rappelons que ces fonctions hypergéométriques peuvent s'exprimer sous forme de série en r sous la forme

$${}_2F_1(a; b; c; dr) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{d^k}{k!} r^k \quad (2.33)$$

avec

$$(x)_k = x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1) \quad (2.34)$$

ou encore

$$(x)_k = \frac{(x+k-1)!}{(x-1)!} \quad (2.35)$$

où $y!$ est la factorielle g n ralis e de y , avec $y \in \mathbb{R}$. Une étude de ces fonctions est faite dans [65].

2.3.1.2 Bifurcation et stabilité de la solution

2.3.1.2.1 Front mince écrivons la fonctionnelle $\mathcal{F}(\dot{\eta}, a)$ vérifiant la formulation variationnelle du problème d'endommagement. Cette écriture est propos e par Rachel-Marie Pradeilles Duval et Claude Stolz dans [77].

$$\mathcal{F}(\dot{\eta}, a, \Psi, \ell) = \sum_{i=s,d} \int_{\Omega_i} \frac{1}{2} \mu_i \left(\dot{\eta}_{,r}^2 + \left(\frac{\dot{\eta}_{,\theta}}{r} \right)^2 \right) d\Omega - \int_{\Gamma} a \ell (\mu_s - \mu_d) \dot{\eta}_{,\theta} d\Gamma + \int_{\Gamma} a^2 \ell^2 (\mu_s - \mu_d) d\Gamma \quad (2.36)$$

Cette fonctionnelle peut s'écrire en prenant en compte la relation liant $\dot{\eta}$ et a comme une forme quadratique en vitesse, W_{a^2}

$$\frac{1}{2} a W_{a^2}(\Psi, \ell) a = \pi (\mu_s - \mu_d) \ell^2 \left[\alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{2} \left(1 - n \frac{(\mu_s - \mu_d) (R^{2n} + \ell^{2n})}{\mu_s (R^{2n} - \ell^{2n}) + \mu_d (R^{2n} + \ell^{2n})} \right) \right] \quad (2.37)$$

\mathcal{F} s'identifie à $a W_{a^2} a$ pour un chargement constant et un champ de vitesse de déplacement vérifiant les conditions d'équilibre avec avancée de la zone endommag e. On remarque que, pour toute vitesse a , la contribution du terme de rang n tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, la fonctionnelle est négative pour toute vitesse a et les bifurcations de fréquence spatiale  lev e sont toujours instables, et ce quelle que soit la position ℓ du front d'endommagement Γ .

2.3.1.2.2 Front  pais On s'intéresse maintenant au cas d'un cylindre soumis à de la torsion, où le front d'endommagement a une épaisseur allant de 0   ℓ_c et où le module de cisaillement varie de façon linéaire dans la zone d'endommagement Ω^+ , *i.e.* $\mu(\hat{\phi}) = \mu_d + \hat{\phi}(\mu_s - \mu_d)$. On suppose que le front d'endommagement est cylindrique et qu'il évolue de façon non axisymétrique à partir d'un certain moment avec une vitesse $a(\theta)$, ce qui induit un gauchissement *a priori* non nul $\dot{\eta}(r, \theta)$.

D'après [88], la fonctionnelle \mathcal{F} s'écrit, en notant κ la courbure du front,

$$\mathcal{F} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \dot{\varepsilon} : \mathbb{C}(d) : \dot{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Gamma} a \int_0^l (-\varepsilon : \mathbb{C}'(d) : \dot{\varepsilon}) (1 - \kappa z) dz ds + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \left(a^2 L + \left(\frac{da}{ds} \right)^2 M \right) d\Gamma \quad (2.38)$$

avec

$$\begin{aligned} L &= \int_0^l (-\varepsilon : \mathbb{C}'(d) : \varepsilon_{,z} (1 - \kappa z) + z \varepsilon : \mathbb{C}'(d) : \varepsilon \kappa^2) dz \\ M &= \int_0^l z \varepsilon : \mathbb{C}'(d) : \varepsilon dz \end{aligned} \quad (2.39)$$

Il est important de remarquer qu'un terme est apparu dans la fonctionnelle par l'introduction d'une zone d'endommagement d'épaisseur non nulle. En effet, le terme

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{1}{2} M \left(\frac{da}{ds} \right)^2 ds \quad (2.40)$$

n'existe pas dans la fonctionnelle liée au problème à transition brutale (cf. équation 2.36). Ce terme pourrait être à l'origine d'un apport de stabilité supplémentaire. Il jouerait donc le même rôle que l'énergie de surface présentée dans la partie 1.3.2 et proposée dans [64].

On remarque que $\int_{\Omega_c} \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}_d : \varepsilon d\Omega \leq \int_{\Omega_c} \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}(d) : \varepsilon d\Omega \leq \int_{\Omega_c} \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}_s : \varepsilon d\Omega$ donc on peut définir \mathcal{F}_d et \mathcal{F}_s telles que $\mathcal{F}_d \leq \mathcal{F} \leq \mathcal{F}_s$. Ainsi, si pour un champ particulier,

1. \mathcal{F}_s est négative, alors la solution est certainement instable ou présente un point de bifurcation ;
2. \mathcal{F}_d est positive, alors la solution est potentiellement stable et sans bifurcation.

La résolution analytique du problème n'a pas pu aboutir. Une résolution numérique a permis d'établir le graphique présenté en figure 2.6 qui résume les résultats. On remarque que, pour une valeur de ℓ_c donnée, il peut ne jamais y avoir de bifurcation possible. Lorsque celle-ci peut avoir lieu, cela n'arrive pas dès l'apparition du front d'endommagement, comme c'est le cas pour l'endommagement par front mince, mais lorsque la zone endommagée est suffisamment développée. Cela est en accord avec les résultats que l'on attend pour un modèle capable de reproduire des essais expérimentaux. La bifurcation doit être possible mais uniquement lorsque la zone endommagée a une taille suffisante.

2.4 Conclusion

Les études préliminaires menées dans cette partie ont permis de montrer l'intérêt d'un modèle d'endommagement comme la TLS. En effet, il est capable de reproduire des comportements complexes lors de l'apparition de la zone endommagée dans le milieu. De plus, l'analyse de

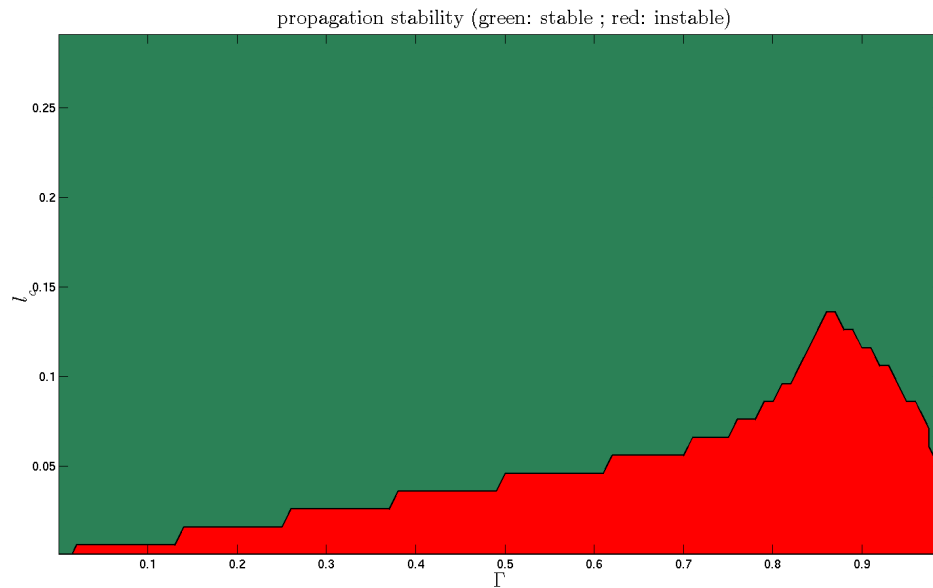


Figure 2.6 – Résumé des résultats de la résolution numérique du problème de bifurcation. La graphique représente la possibilité de bifurcation (en rouge) ou l’absence de celle-ci (en vert) en fonction de la longueur caractéristique l_c (en ordonnée) et de la position ℓ du front Γ (en abscisse)

l’influence des caractéristiques du profil d’endommagement nous permet d’avoir des pistes sur la forme des profils d’endommagement intéressants d’un point de vue théorique. Il sera prouvé dans la suite (cf. partie 6) que de telles formes sont en accord avec des observations expérimentales et des résolutions de modèles mesoscopiques. Finalement, une analyse de stabilité-bifurcation a mis en évidence l’intérêt du modèle TLS par rapport à des modèles d’endommagement par front mince par un apport de stabilité supplémentaire.

CHAPITRE 3

ÉTUDE DE LA PROPAGATION AUTOSIMILAIRE D'UNE FISSURE

Dans cette partie, on tente d'obtenir quelques résultats de référence concernant les champs mécaniques dans la zone endommagée au cours d'une propagation auto-similaire dans un milieu infini d'une quasi-fissure sous le modèle TLS, c'est-à-dire d'une zone endommagée contenant une fissure rectiligne. On se contente du cas d'une fissure se propageant en mode III dans un milieu incompressible et infini. Afin de résoudre le problème d'élasticité qui fournit la forme des champs mécaniques dans cette zone, il est nécessaire de connaître la géométrie du problème, ce qui passe par la connaissance de la position du front d'endommagement. Celle-ci dépend *a priori* du profil d'endommagement et de la loi d'évolution choisie. La détermination exacte de la forme du front d'endommagement a été impossible pour l'auteur au cours de ces travaux. Ainsi, un algorithme d'optimisation de forme a été mis en place afin de déterminer numériquement la forme de la zone endommagée au cours de la propagation auto-similaire. Cet algorithme a tout d'abord été confronté à deux problèmes dont la solution analytique était connue [89]. Une fois validé, il a été appliqué au modèle TLS. Finalement, dans l'un des cas étudiés, la forme asymptotique des champs mécaniques autour de la pointe de la fissure a été obtenue.

3.1 Recherche de la forme du front d'endommagement

3.1.1 Présentation de l'algorithme

On suppose qu'une zone endommagée formant une quasi-fissure se propage de façon auto-similaire dans un milieu incompressible et infini. Ainsi, en coordonnées polaires, le déplacement peut écrire sous la forme

$$\mathbf{u} = u(r, \theta) \mathbf{e}_z \quad (3.1)$$

et le problème d'équilibre s'écrit dans le cas d'un module de cisaillement non uniforme

$$\operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{u}) = 0 \quad (3.2)$$

et $\Delta u = 0$ pour un module de cisaillement uniforme. Le matériau totalement endommagé a par hypothèse un module de cisaillement nul. Le front d'endommagement est supposé être composé en deux dimensions de deux droites parallèles et d'une zone en évolution de forme inconnue à l'avant de la zone endommagée (cf. figure 3.1). La zone d'endommagement a une épaisseur arbitraire dans le cas de l'endommagement par front mince et une épaisseur égale à $2\ell_c$ pour le modèle TLS. Cependant, on admet l'existence d'une zone totalement endommagée Ω_c de

mesure nulle délimitée par une frontière Γ_c composée de deux demi-droites coïncidentes (cf. figure 3.2). Afin de simplifier l'écriture des équations, la notation Γ_c sera conservée dans le cas du modèle d'endommagement par front mince, où elle sera identique à $\Gamma_{//}$. Ainsi, dans les deux cas, Γ_c est un bord libre à l'intérieur du domaine simulé. D'un point de vue numérique dans le cadre du modèle TLS, celui-ci est imposé en donnant un angle d'inclinaison très faible aux deux demi-droites définissant le front d'endommagement. La zone morte est donc de taille non-nulle. L'utilisation de fonctions de niveaux et de la technologie dite "de double découpe" est présenté dans [82] permet d'imposer la condition aux limites de bord libre malgré un maillage non uniforme. Un tel problème n'existe pas dans le cadre de l'endommagement par front mince.

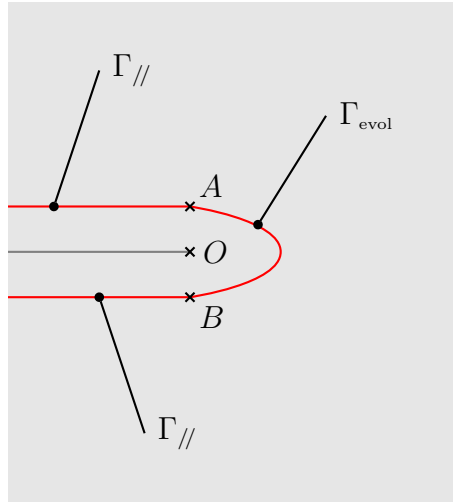


Figure 3.1 – Domaine simulé pour le problème d'optimisation de forme et notations de la décomposition du front d'endommagement.

Le front d'endommagement se compose donc de deux parties distinctes. La première est composée de la zone du front en évolution Γ_{evol} où le critère d'évolution est atteint et où la vitesse de propagation est supposée *a priori* non nulle. La deuxième $\Gamma_{//}$, composée de deux demi-droites parallèles, n'évolue plus. Ainsi, par continuité du critère d'endommagement et de la vitesse sur le front, il existe deux points symétriques du front d'endommagement, notés A et B sur la figure 3.2, pour lesquels le critère d'évolution est atteint et la vitesse d'avancée est nulle. Le milieu du segment défini par ces points est choisi comme centre du domaine simulé et du repère.

En ce qui concerne les conditions aux limites sur le bord extérieur, on suppose que le comportement du milieu est élastique linéaire pour des déformations suffisamment faibles. Ainsi, le développement asymptotique externe est celui d'une fissure dans un milieu élastique linéaire, soit

$$u(r \rightarrow +\infty, \theta) = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin(\theta/2) \quad (3.3)$$

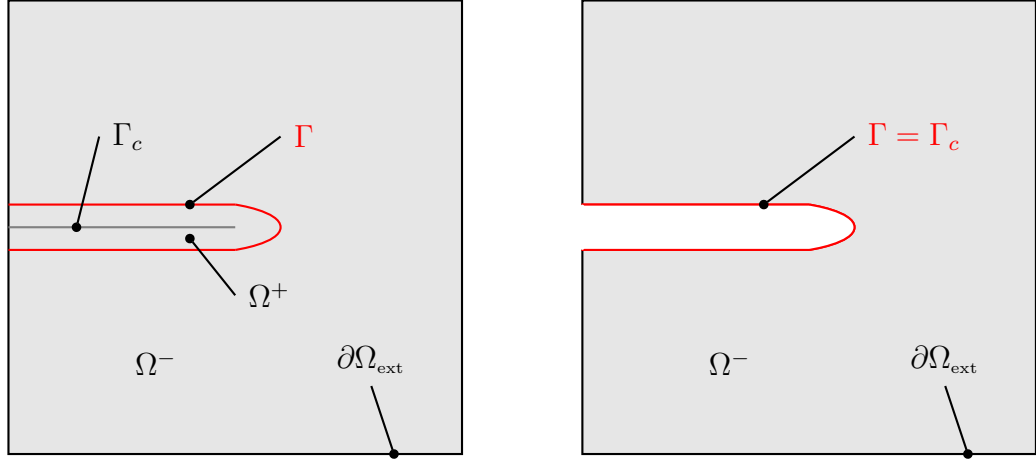


Figure 3.2 – Domaine simulé pour le problème d’optimisation de forme sous les modèles TLS (à gauche) et de front mince (à droite).

Cette condition sera imposée sur les bords extérieurs du domaine simulé $\partial\Omega_{\text{ext}}$. Remarquons que la position du centre du repère utilisé pour l’expression de ce champ de déplacement a peu d’impact sur les résultats. Il est donc choisi de le faire coïncider avec le centre du domaine O défini ci-dessus. La valeur de K_{III} sera choisie de telle sorte que le critère d’évolution du front soit vérifié en les deux points particuliers A et B pour lesquels le critère doit être atteint et la vitesse normale d’avancée est nulle.

L’objectif de l’algorithme est de déterminer la forme de Γ_{evol} telle que l’équilibre

$$\begin{cases} \mathbf{u} = u(r, \theta) \mathbf{e}_z & \text{dans } \Omega \\ \text{div}(\mu \nabla \mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(r \rightarrow +\infty, \theta) = \frac{2K_{\text{III}}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin(\theta/2) & \text{sur } \partial\Omega_{\text{ext}} \\ \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_c \end{cases} \quad (3.4)$$

et les équations d’évolution soient vérifiés. Ces dernières s’écrivent

$$\begin{cases} f^{\text{evol}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{evol}} \\ f^{\text{evol}} \leq 0 & \text{sur } \Gamma_{//} \end{cases} \quad (3.5)$$

en notant f^{evol} le critère d’évolution égal à f_{TLS} dans le cas du modèle TLS et à $g - g_c$ pour l’endommagement par front mince. Afin de vérifier ces deux systèmes d’équations, l’algorithme présenté en figure 3.3 a été mis en place. La résolution du problème d’hyper-élasticité est dé-

taillée dans l'algorithme 3.4. Dans le cas du problème TLS, la non-linéarité du comportement est plus simple à traiter dans la mesure où le comportement local est connu une fois la position du front donnée. On se contente ici d'un comportement symétrique en traction-compression et donc complètement linéaire. Si un comportement asymétrique en traction-compression était choisi, la résolution serait en effet non-linéaire et un algorithme de Newton-Raphson comme celui décrit dans [18] pourrait être employé. Une fois le déplacement connu pour un chargement unitaire, le facteur de charge nécessaire pour vérifier la condition d'évolution (3.5) se retrouve par proportionnalité. Ce n'est pas le cas pour le matériau hyper-élastique pour lequel la non-linéarité dépend de l'état local de chargement et non seulement de son signe.

Forme initiale de Γ_{evol} donnée
Tant que critère d'évolution (3.5) non vérifié sur Γ_{evol} **Faire**
 Résolution du problème d'élasticité et détermination du facteur de charge K_{III}
 Lissage des déformations
 Calcul du critère d'évolution du front
 Calcul de la vitesse d'avancée du front (cf. équation (3.6))
 Mise à jour de la fonction de niveau (et donc de Γ_{evol})
Fin Tant que

Figure 3.3 – Description globale de l'optimisation de forme

Facteur de chargement donné (itération précédente)
 Résolution d'un problème d'élasticité arbitraire
Tant que variation de K_{III} ou de $u >$ tolérance **OU** première itération **Faire**
Si $\text{Iter}_K \geq \text{Iter}_K^{\text{max}}$ **Alors**
 Mise à jour de K_{III} pour vérifier (3.5)
 $\text{Iter}_K \leftarrow 0$
Fin Si
 Calcul d'une nouvelle correction Δu
 $\text{Iter}_K \leftarrow \text{Iter}_K + 1$
Fin Tant que

Figure 3.4 – Description de la résolution du problème d'élasticité (3.4)

Il reste à préciser la vitesse imposée au front au cours des itérations de l'algorithme. Celle-ci doit s'annuler lorsque le critère d'évolution est localement nul. Par ailleurs, en l'absence de calcul de sensibilité qui permettrait de déterminer la vitesse de façon implicite, il est nécessaire de choisir une vitesse de front qui conduise à une évolution dans le sens approprié. On se donne la vitesse du front suivante

$$a(s) = k \frac{f^{\text{evol}}(s) - f^{\text{evol}}(A)}{f^{\text{evol}}(A)} \quad (3.6)$$

où $f^{\text{evol}}(A)$ est le critère d'évolution au point A défini dans la figure 3.2 pour lequel la vitesse d'avancée doit être nulle. Remarquons que le choix de A ou de B est arbitraire et la valeur numérique du critère en ces deux points est suffisamment proche pour qu'il n'y ait pas de conséquences sur le résultat.

Cependant, le choix du signe de k n'est quant à lui pas banal. Les deux possibilités sont essayées systématiquement. Dans les cas où l'algorithme converge, logiquement seulement l'un des deux signes permet d'avoir cette convergence. Lorsque la convergence est obtenue avec k positif, on déduit que lorsque le critère est dépassé, l'avancée du front fait diminuer celui-ci. Ainsi une certaine stabilité de la forme du front lors de la propagation auto-similaire peut être supposée. Lorsque la convergence est atteinte avec k négatif, on est face à une forme de propagation du front instable dans la mesure où une faible perturbation qui augmenterait localement le critère et ferait avancer le front conduirait à une nouvelle augmentation du critère d'évolution et donc à la modification de la forme du front. La convergence ou non de l'algorithme peut donc fournir des informations partielles sur la stabilité de la propagation auto-similaire du front d'endommagement.

Remarquons que dans le cas de l'endommagement par front mince, il sera nécessaire de lisser la vitesse sur le front pour éviter des instabilités similaires à ce que l'on retrouve dans la forme du front d'endommagement décrits dans la partie 2.3. En effet, la vitesse présente des oscillations de fréquence spatiale arbitrairement élevée en présence de perturbations. Le bruit numérique suffit à faire apparaître de telles oscillations comme on peut l'observer dans la figure 3.5 où la densité très élevée du maillage a pour objectif de diminuer l'erreur de discrétisation. L'algorithme ayant été initialisé à la solution analytique, le front ne devrait pas évoluer. Afin d'y remédier, une méthode de pénalisation du gradient est appliquée comme détaillé dans [89]. en notant \tilde{a} la vitesse régularisée, celle ci est obtenue par

$$\forall a^*, \quad \int_{\Gamma_{\text{evol}}} \tilde{a} a^* ds + \nu \int_{\Gamma_{\text{evol}}} \nabla \tilde{a} \nabla a^* ds = \int_{\Gamma_{\text{evol}}} a a^* ds \quad (3.7)$$

Celle-ci n'est pas nécessaire pour le modèle TLS et n'est donc pas utilisée. La vitesse est naturellement régularisée par l'épaisseur de la zone d'endommagement et le caractère non local du critère d'évolution.

3.1.2 Validation de l'algorithme

La validation de l'algorithme a été réalisée pour un matériau élastique fragile et pour un matériau hyper-élastique dans un article publié en 2015 [89]. Rappelons les hypothèses principales et quelques résultats concernant le matériau hyper-élastique étudié dans cet article. On note $\tau = \|\sigma\|$ la contrainte de cisaillement et $R = \|\nabla u\|$ le cisaillement. Le comportement, représenté

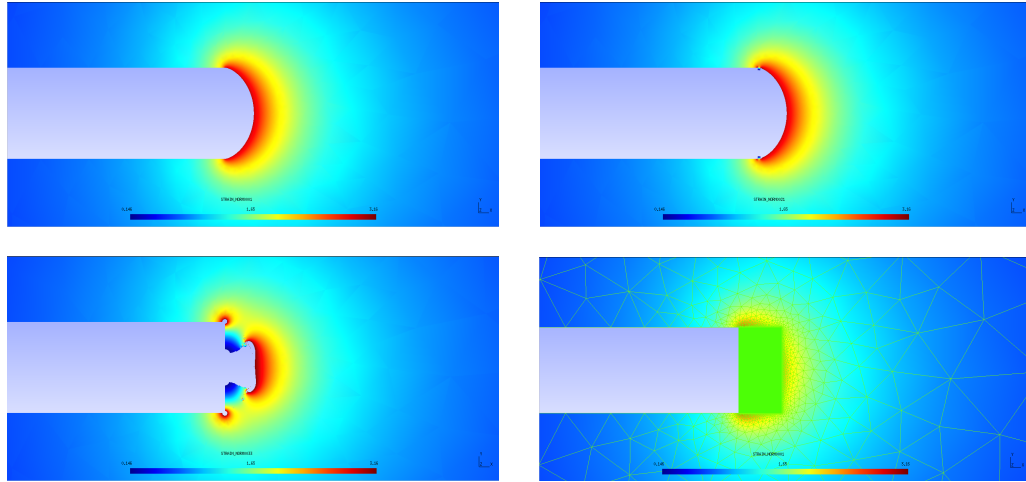


Figure 3.5 – Champ de R , dans le cas du modèle de front mince, au cours des itérations en absence de régularisation de la vitesse d’avancée du front. Le bleu correspond à des déformations faibles et le rouge à des déformations élevées. Ici, l’algorithme est initialisé à la position exacte analytique. Le critère est pratiquement nul sur tout le front d’évolution Γ_{evol} . Les trois premières images correspondent respectivement à la 1^{ère}, 21^{ème} et 33^{ème} itérations. La dernière montre la densité très élevée du maillage.

dans la figure 3.6, vérifie

$$\begin{cases} R \leq R_0 & \text{pour } \tau = \mu_o R \\ R_0 \leq R \leq R_m & \text{pour } \tau = \mu_o R_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^\alpha \\ R_m \leq R & \text{pour } \tau = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Dans ce cas, la zone endommagée qui supporte une contrainte de cisaillement nulle, a une

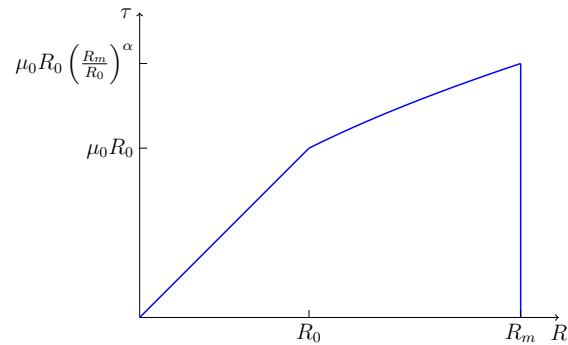


Figure 3.6 – Comportement local hyper-élastique étudié dans [89]. Ici, $\alpha = 0,5$.

épaisseur non nulle H , fonction de R_m et du facteur de chargement K_{III} :

$$H = \frac{K_{III}}{(\mu_o R_0)^2} \quad (3.9)$$

La forme des iso-R pour $R \geq R_0$, et en particulier celle du bord libre dans la zone d'intérêt — iso- R_m — est une cycloïde \mathcal{C}_R décrite par

$$(x, y) \in \mathcal{C}_R \iff \exists \Theta \in [0; \pi] / \begin{cases} x = -\left(\frac{a_1}{\rho^{\alpha+1}} + b \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) \frac{\cos(2\Theta)}{2} - \left(\frac{a_1}{\rho^{\alpha+1}} + b\right) \frac{\alpha-1}{2(\alpha+1)} - \frac{2b\alpha}{\alpha+1} \log(\rho) - \frac{a_1}{\alpha+1} \\ y = -\left(\frac{a_1}{\rho^{\alpha+1}} + b \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) \frac{\sin(2\Theta)}{2} + b\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (3.10)$$

en notant $\rho = \frac{R}{R_0}$ et où

$$\left(\frac{2b}{\alpha+1} - \frac{a_1}{\rho_m^{\alpha+1}}\right) \cos(\Theta) = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{2b}{\alpha+1} \left(\rho_m^{\alpha+1} + \frac{\alpha-1}{2}\right) = 1 \quad (3.12)$$

avec $\rho_m = \frac{R_m}{R_0}$. La condition (3.11) provient de l'accord avec le développement asymptotique dans un milieu élastique linéaire et la condition (3.12) traduit la condition de bord libre. Ce résultat est obtenu par la méthode de l'hodographe [51]; le détail des calcul est donné dans [89]. L'application de l'algorithme ici proposé permet d'obtenir l'iso- R_m avec une précision de 0,005 % de la longueur caractéristique du problème, soit l'épaisseur de la zone endommagée H . En ce qui concerne l'iso- R_0 , la précision relative est de 0,27 %. Les résultats sont présentés dans les figures 3.7 et 3.8. La description la plus précise suite à la discrétisation du front est de 0,002 % et l'écart initial est d'environ 25 % pour une initialisation en forme de demi-cercle.

Notons que la convergence de l'algorithme est ici obtenue avec une valeur de k négative, ce qui présuppose une certaine instabilité de la propagation auto-similaire de cette géométrie.

3.1.3 Application au modèle TLS

Intéressons-nous à présent à l'application de l'algorithme d'optimisation de forme décrit ci-dessus à la recherche de la forme du front d'endommagement d'une zone endommagée de type quasi-fissure sous le modèle TLS. Le taux de restitution d'énergie local est supposé indépendant

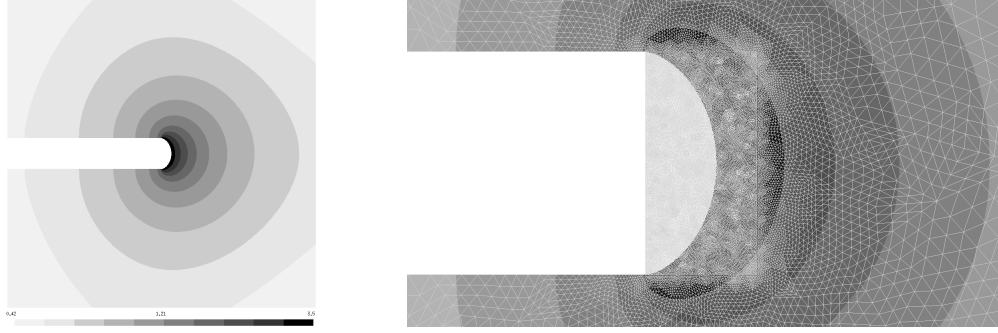


Figure 3.7 – Cisaillement dans le milieu matériel. Le gris clair (respectivement foncé) correspond aux taux de cisaillement faibles (respectivement élevés). À gauche, l’ensemble du domaine. À droite, le détail autour de la zone d’endommagement ou $\text{iso-}R_m$. Le maillage est visible dans l’image de droite.

de l’état du matériau, soit $Y_c = Y_c^0$ constant. Ainsi le critère d’évolution utilisé ici s’écrit

$$f_{\text{TLS}} = \frac{\int_{\phi=0}^{\ell} Y(\varepsilon, d) j d'(\hat{\phi}) d\phi}{\int_{\phi=0}^{\ell} j d'(\hat{\phi}) d\phi} - Y_c^0 \quad (3.13)$$

Remarquons que l’épaisseur de la zone d’endommagement peut varier dans la zone d’évolution. Cette épaisseur est définie comme la distance séparant un point du front M_0 du point M_{\max} le plus éloigné dont la valeur de l’endommagement est liée à la position M_0 . En effet, la forme semi-circulaire de Γ_{evol} est la seule qui conduit à une épaisseur uniforme égale à ℓ_c sous l’hypothèse d’une zone endommagée d’épaisseur $2\ell_c$ à l’arrière de la zone d’évolution. Dans ce cas, le centre du domaine 0 est équidistant de tous les points du front. Une forme plus allongée conduit *a fortiori* à une épaisseur plus faible à l’avant qui augmente progressivement vers ℓ_c au fur et à mesure que la zone endommagée auto-similaire s’établit. On voit donc un *squelette* apparaître, c’est-à-dire un lieu de discontinuité du gradient de la fonction de niveau qui induit, même avec des profils d’endommagement \mathcal{C}^1 , une discontinuité de gradient de l’endommagement ∇d .

Trois profils d’endommagement polynomiaux sont étudiés. Ils sont tous symétriques par rapport au point milieu du profil $(\hat{\phi}; d) = (0, 5; 0, 5)$. Ils se caractérisent par leur comportement aux extrémités, soit en $(\hat{\phi}; d) = (0; 0)$ et en $(\hat{\phi}; d) = (1; 1)$. Ainsi, ils sont désignés par les termes *linéaire*, *parabolique* et *cubique* en fonction de leur similarité avec ces polynômes en ces points.

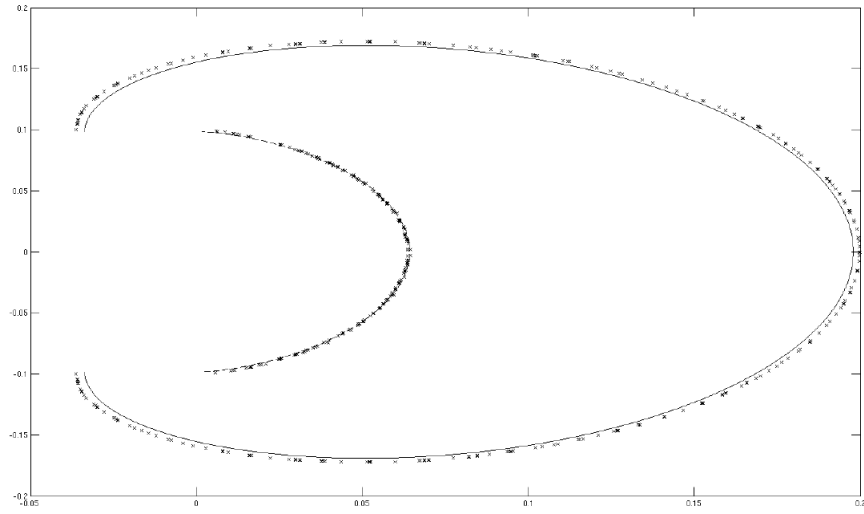


Figure 3.8 – Comparaison entre l'iso- R_m (en trait plein) et l'iso- R_0 analytiques et des points extraits des mêmes lignes trouvées par l'algorithme d'optimisation de forme (croix). Les points tracés sont les intersections entre les fonctions de niveaux correspondantes et les arrêtes du maillage.

3.1.3.1 Profil linéaire

On se donne le profil d'endommagement linéaire suivant, qui est représenté dans la figure 3.9.

$$\begin{cases} d(\hat{\phi}) = 0 & \text{pour } \hat{\phi} \leq 0 \\ d(\hat{\phi}) = \hat{\phi} & \text{pour } 0 \leq \hat{\phi} \leq 1 \\ d(\hat{\phi}) = 1 & \text{pour } \hat{\phi} \geq 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

La convergence dans ce cas a été obtenue avec k positif à partir de différentes géométries ini-

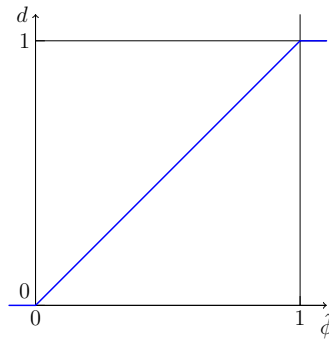


Figure 3.9 – Profil d'endommagement linéaire.

tiales : circulaire, elliptique et cycloïdale. La solution est très proche d'un demi-cercle comme on peut l'observer dans la figure 3.10. Cependant, l'analyse de la valeur de \bar{Y} montre que la forme

n'est pas exactement circulaire (cf. figure 3.11). Il est possible d'observer des formes similaires lors de simulations de propagation sous le modèle TLS en chargement quasi-statique de type mode I prédominant.

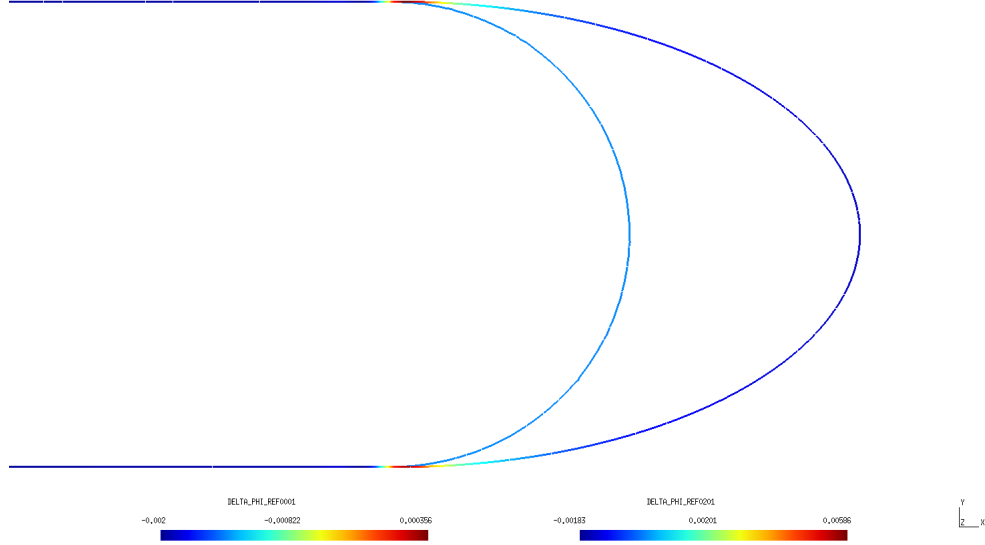


Figure 3.10 – Valeur de la vitesse du front à l'initiation (forme elliptique) et à convergence pour un profil d'endommagement linéaire. Pour le front à convergence, la vitesse d'avancée imposée est nulle.

3.1.3.2 Profil parabolique

On considère maintenant le profil dit *parabolique* suivant, dont le comportement en $\hat{\phi} = 0^+$ et $\hat{\phi} = 1^-$ est parabolique comme représenté dans la figure 3.12.

$$\begin{cases} d(\hat{\phi}) = 0 & \text{pour } \hat{\phi} \leq 0 \\ d(\hat{\phi}) = -2\hat{\phi}^2(\hat{\phi} - 3/2) & \text{pour } 0 \leq \hat{\phi} \leq 1 \\ d(\hat{\phi}) = 1 & \text{pour } \hat{\phi} \geq 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Comme dans le cas du profil linéaire, la convergence est obtenue pour une valeur positive de k . Remarquons que la forme légèrement allongée observée (cf. figure 3.13) avec l'algorithme peut aussi être obtenue lors des simulations sous chargement quasi-statique. Dans ce cas, il existe un squelette à l'avant de la zone endommagée. Il peut être visualisé en traçant le gradient nodal par élément de la fonction de niveau discrétisée : on observe une variation importante d'orientation qui témoigne d'un saut de $\nabla\phi$ (cf. figure 3.14).

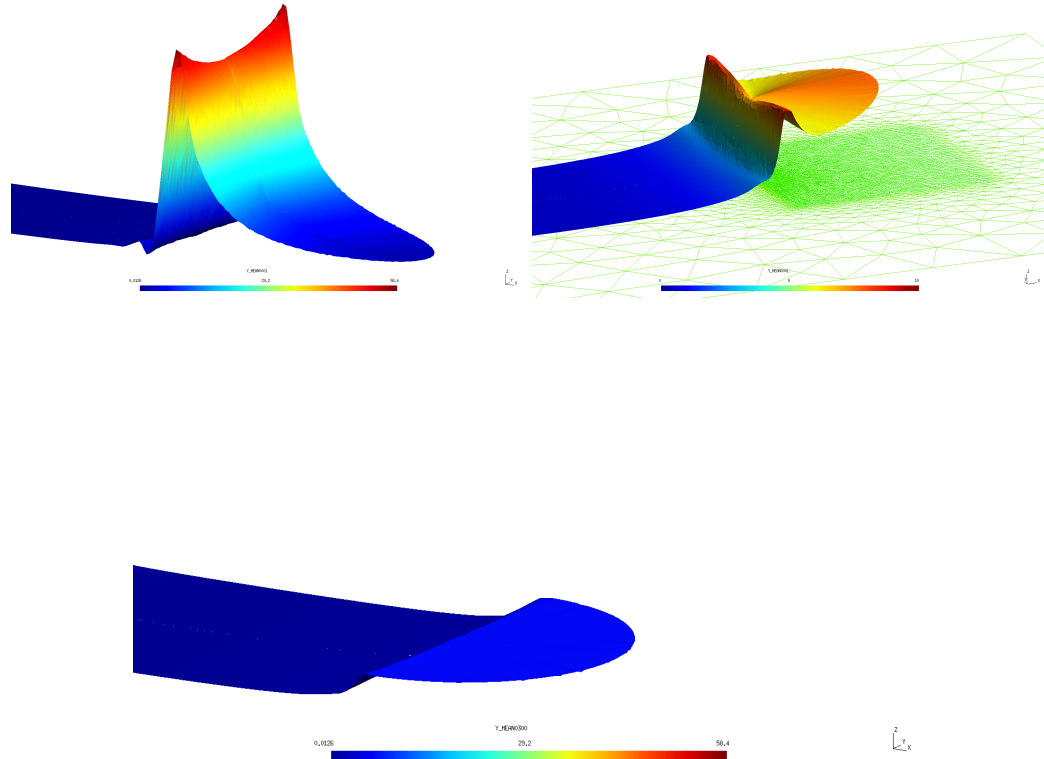


Figure 3.11 – Valeur de \bar{Y} représentée sur l'ensemble de la zone d'endommagement dans le cas du profil d'endommagement linéaire (la valeur diffère légèrement sur les segments orthogonaux au front en raison de la méthode de calcul utilisée : l'uniformité de \bar{Y} sur les segments n'est pas imposée de façon exacte. La méthode est décrite dans [18]. Les résultats sont représentés en perspective avec une hauteur proportionnelle à la valeur de \bar{Y} . On observe sur les deux premières figures le champ de \bar{Y} pour des initialisations elliptique (à gauche) et circulaire (à droite). En bas, le champ à convergence. Sur la deuxième image, le maillage utilisée est visible en vert à hauteur nulle.

3.1.3.3 Profil cubique et de degré supérieur

On s'intéresse à présent à des profils d'endommagement similaires à des polynômes de degré supérieur ou égal à 3 aux points extrêmes. Le profil dit *cubique* est donné ci-dessous et tracé dans la figure 3.15.

$$\begin{cases} d(\hat{\phi}) = 0 & \text{pour } \hat{\phi} \leq 0 \\ d(\hat{\phi}) = \hat{\phi}^3(6\hat{\phi}^2 - 15\hat{\phi} + 10) & \text{pour } 0 \leq \hat{\phi} \leq 1 \\ d(\hat{\phi}) = 1 & \text{pour } \hat{\phi} \geq 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

Dans ce cas, il a été impossible de faire converger l'algorithme, quelle que soit la valeur de k . Remarquons que lorsque le profil d'endommagement a des comportements asymptotiques de

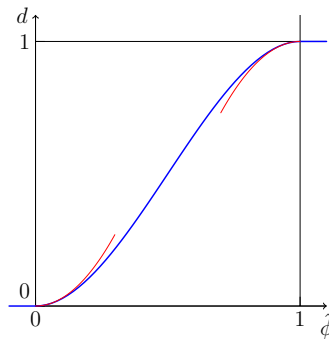


Figure 3.12 – Profil d’endommagement dit *parabolique*. En rouge les comportements asymptotiques paraboliques en $3\hat{\phi}^2$.

degré élevé, le gradient de l’endommagement est élevé autour de $\hat{\phi} = 1/2$ et le comportement obtenu se rapproche de celui de l’endommagement par front mince avec une discontinuité de comportement en $\hat{\phi} = 1/2$. Or, il a été vu précédemment que la convergence de l’algorithme est obtenue dans le cas du front mince pour des valeurs négatives de k . Il est donc compréhensible qu’il existe une valeur charnière — ou une plage de valeurs — pour le degré du profil, qui fasse basculer la condition de convergence de k positif à k négatif.

3.1.3.4 Limites de la méthode

La méthode employée pour déterminer la forme du front d’endommagement reste très limitée dans la mesure où la détermination de la vitesse d’avancée du front se fait de façon explicite par rapport à \bar{Y} . De plus, elle suppose une propagation auto-similaire avec une épaisseur de la zone endommagée égale à $2\ell_c$ et d’angle nul. Par ailleurs, malgré un maillage très raffiné, il est impossible sans précautions particulières de déterminer le comportement des champs mécaniques autour de la pointe de la fissure. Ainsi, une tentative analytique est menée dans la suite du chapitre.

3.2 Étude asymptotique des champs mécaniques en pointe de fissure

Afin de mieux connaître et comprendre les caractéristiques de la propagation auto-similaire d’une quasi-fissure sous le modèle TLS, on s’intéresse au comportement asymptotique des champs mécaniques autour de la pointe de la quasi-fissure. Celui-ci étant *a fortiori* dépendant de la distribution de l’endommagement dans le milieu, la connaissance de la position du front d’endommagement est nécessaire à la résolution du problème d’élasticité. Or, celle-ci n’est connue que pour deux cas particuliers de profils d’endommagements : le linéaire et le *parabolique*. Et ce d’une façon approximative. De plus, dans le cas du profil *parabolique*, la présence d’un squelette com-

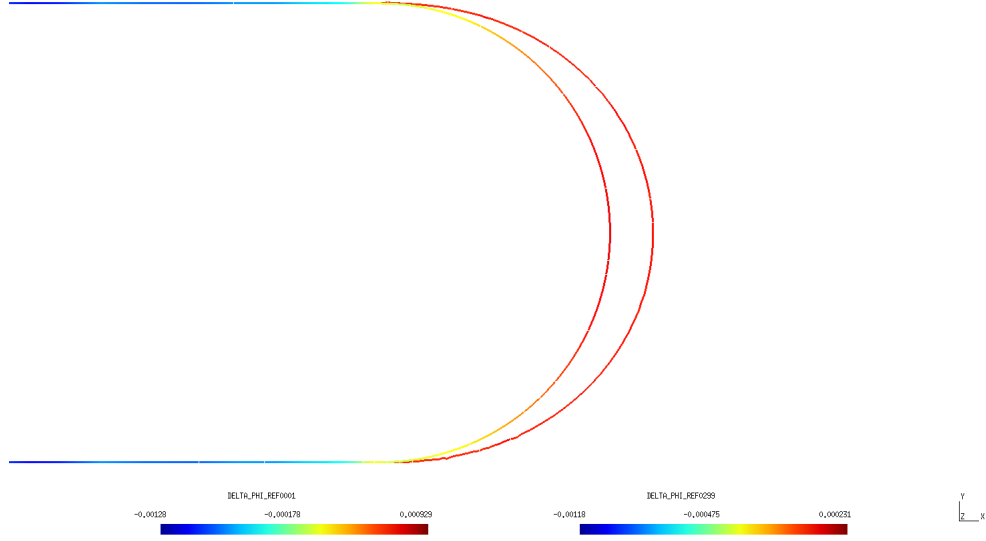


Figure 3.13 – Valeur de la vitesse du front à l’initiation (forme circulaire) et à convergence pour un profil d’endommagement dit *parabolique*. Pour le front à convergence, la vitesse d’avancée imposée est nulle.

plique la description des champs. Ainsi, on se contente dans cette partie de l’analyse des champs dans le cas d’une forme de front circulaire par sa proximité avec la forme observée dans le cas du profil linéaire. Cependant, pour cette géométrie, on établit les équations permettant de déduire le comportement asymptotique autour de la pointe de la quasi-fissure pour différents types de profils d’endommagement.

3.2.1 Hypothèses

On suppose toujours que le milieu est incompressible et chargé en mode III de telle sorte que

$$\mathbf{u} = u(r, \theta) \mathbf{e}_z \quad (3.17)$$

On suppose de plus que le déplacement u a un comportement asymptotique

$$u(r, \theta) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r^\alpha f(\theta) \quad (3.18)$$

avec $f \in \mathcal{C}^1$ et le profil d’endommagement vérifie

$$1 - d(\hat{\phi}) \underset{\hat{\phi} \rightarrow 1}{\sim} (1 - \hat{\phi})^\beta \quad (3.19)$$

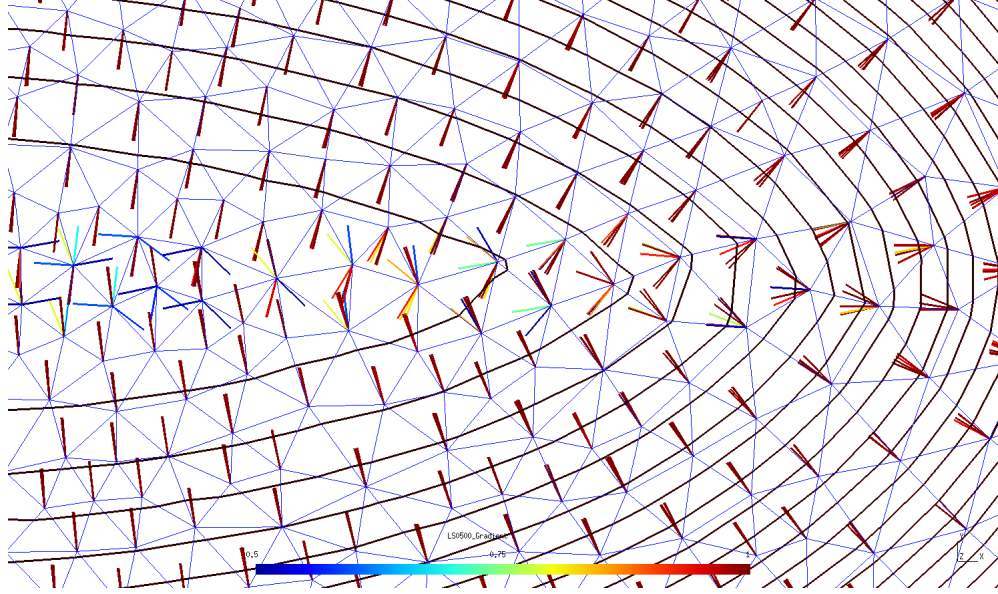


Figure 3.14 – Gradient nodal par élément de la fonction de niveau dans la configuration convergée de la position du front d’endommagement. En bleu, le maillage et en noir des iso-valeur de l’endommagement.

On en déduit que l’équilibre $\text{div}(\sigma) = 0$ s’écrit

$$\left(ru_{,r}(1 - \hat{\phi})^\beta \right)_{,r} + \frac{1}{r} \left(u_{,\theta}(1 - \hat{\phi})^\beta \right)_{,\theta} = 0 \quad (3.20)$$

L’expression de cette équation dépend de la distribution spatiale de la fonction de niveau ϕ . En considérant des coordonnées cartésiennes (x, y, z) et en admettant la symétrie par rapport à $y = 0$, on se contente de l’analyse du demi-plan $y > 0$ et $z = 0$. On admet que le front d’endommagement dans cette partie est décrit par les deux lieux distincts :

- une demi-droite caractérisé par $x < 0$ et $y = \ell_c$ et
- un quart de cercle caractérisé par $x > 0$ et $r = \ell_c$

3.2.2 Demi-plan $x > 0$

À l’avant de la pointe de la quasi-fissure, la relation entre la fonction de niveau et la position d’un point s’écrit

$$\ell_c - \phi = r \quad (3.21)$$

et alors l’équation d’équilibre devient, en notant f_+ la restriction de f à $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ soit à $x > 0$,

$$f_+''(\theta) + \alpha(\alpha + \beta)f_-(\theta) = 0 \quad (3.22)$$

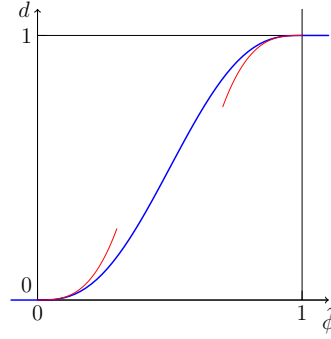


Figure 3.15 – Profil d’endommagement dit cubique. En rouge les comportement asymptotique cubique $10\hat{\phi}^3$.

Les solutions sont de la forme

$$f_+(\theta) = D \sin(\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}\theta) + E \cos(\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}\theta) \quad (3.23)$$

où D et E sont deux constantes.

3.2.3 Demi-plan $x < 0$

À l’arrière de la pointe de la quasi-fissure, le front est une iso-ordonnée donc

$$\ell_c - \phi = y \quad (3.24)$$

et l’équation d’équilibre, en notant f_- la restriction de f à $\theta \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ soit à $x < 0$, s’écrit

$$f_-''(\theta) + \frac{\beta}{\tan(\theta)} f_+'(\theta) + \alpha(\alpha + \beta) f_-(\theta) = 0 \quad (3.25)$$

Dans [75], on propose le changement de variable $\xi = \cos(\theta)$. En notant abusivement $f(\xi) = f(\theta)$ et f' la dérivée de f par rapport à ξ , on obtient

$$(1 - \xi^2) f_-''(\xi) - (\beta + 1) \xi f_-'(\xi) + \alpha(\alpha + \beta) f_-(\xi) = 0 \quad (3.26)$$

La solution à cette équation différentielle est donnée dans le cas général [93] à partir de la fonction de Gegenbauer — que l’on note C — et de celle de Legendre de deuxième espèce — notée Q —

$$f_-(\xi) = A C_{\alpha}^{\beta/2}(\xi) + B (1 - \xi^2)^{\frac{1}{4}(1-\beta)} Q_{\beta/2 + \alpha - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} - \beta/2}(\xi) \quad (3.27)$$

soit, en reprenant le problème initial et ses notations,

$$f_-(\theta) = AC_\alpha^{\beta/2}(\cos(\theta)) + B \sin(\theta)^{\frac{1-\beta}{2}} Q_{\alpha+\frac{\beta-1}{2}}^{\frac{1-\beta}{2}}(\cos(\theta)) \quad (3.28)$$

où A et B sont deux constantes.

Il est intéressant de préciser que pour $\beta = 2$, une solution explicite est fournie dans [75], en admettant $1 + \alpha(\alpha + \beta) > 0$:

$$f_-(\theta) = \frac{\tilde{A} \sin(\sqrt{1 + \alpha(\alpha + \beta)}\theta) + \tilde{B} \cos(\sqrt{1 + \alpha(\alpha + \beta)}\theta)}{\cos(\theta)} \quad (3.29)$$

3.2.4 Détermination des constantes

Le déplacement \mathbf{u} est supposé continu et dérivable, ce qui impose la continuité en $\theta = \frac{\pi}{2}$ de f et sa dérivée f' , donc

$$f_-(\theta = \pi/2) = f_+(\theta = \pi/2) \quad (3.30)$$

$$f'_-(\theta = \pi/2) = f'_+(\theta = \pi/2) \quad (3.31)$$

Par ailleurs, les conditions aux limites s'écrivent

$$f_+(\theta = 0) = 0 \quad \text{par symétrie par rapport à } y = 0 \quad (3.32)$$

$$|f_-| < \infty \quad \text{pour une solution bornée} \quad (3.33)$$

$$f'_-(\theta = \pi) = 0 \quad \text{car le bord est libre} \quad (3.34)$$

La première condition se vérifie aisément en imposant $E = 0$. Notons par ailleurs que la solution sera définie à une constante multiplicative près ; il est donc légitime de chercher une seule fonction f en imposant $D = 1$. Les conditions restantes, ainsi que celles de raccord, vont être étudiées uniquement dans les cas particuliers $\beta = 1$ et 2 .

3.2.4.1 Profil linéaire ($\beta = 1$)

La fonction f s'écrit dans chaque sous-domaine

$$\begin{cases} f_+(\theta) = \sin(\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}\theta) \\ f_-(\theta) = AC_\alpha^{1/2}(\cos(\theta)) + BQ_\alpha^0(\cos(\theta)) \end{cases} \quad (3.35)$$

Les fonctions de Gegenbauer C et de Legendre de deuxième espèce Q avec les paramètres donnés sont divergentes avec le même comportement logarithmique en $\theta \rightarrow \pi^-$. Le second terme n'étant

plus divergent pour aucune des deux fonctions, la condition de solution bornée se traduit par l'annulation des termes prépondérants, soit

$$2 \tan(\alpha\pi)A + \pi B = 0; \quad (3.36)$$

Les deux conditions de raccord ajoutées à cette dernière conduisent à la détermination de α . Il existe une infinité de solutions : la valeur positive la plus faible et conduisant donc au minimum d'énergie est d'environ 0,28. La condition de contrainte nulle est naturellement vérifiée. La figure 3.16 montre la forme de f obtenue et le déplacement u résultant. Ces résultats ont été comparés avec le déplacement obtenu numériquement lors de la simulation TLS (cf. figure 3.17). Les allures sont très proches autour de la pointe de la quasi-fissure. En s'éloignant, les comportements diffèrent ; le résultat analytique est une approximation asymptotique et ne peut donc pas reproduire fidèlement le déplacement loin de la pointe.

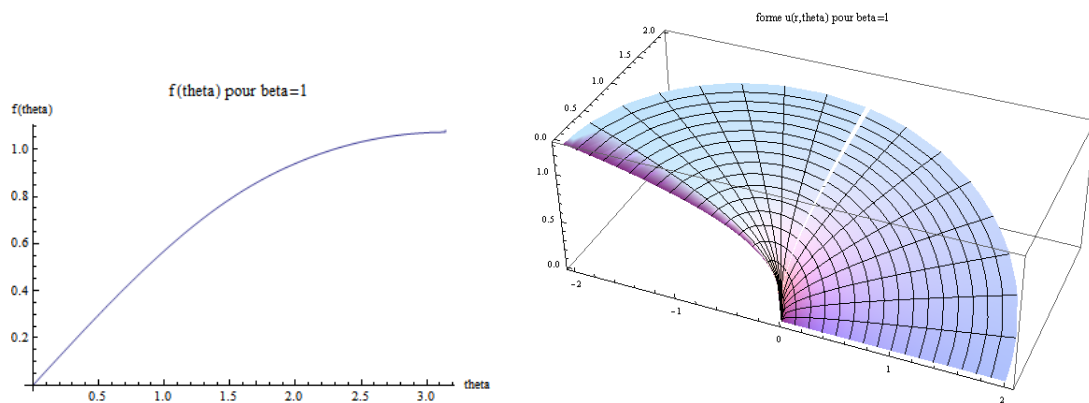


Figure 3.16 – Forme de la solution au problème d'élasticité autour de la pointe de la quasi-fissure pour le profil linéaire ($\beta = 1$). À gauche, la forme de la fonction $f(\theta)$. À droite, une représentation tridimensionnelle du déplacement sur le demi-plan $y > 0$. L'allure est similaire à celle du champ de déplacement autour de la pointe d'une fissure dans un milieu élastique homogène.

3.2.4.2 Profil parabolique ($\beta = 2$)

Dans ce cas, la fonction f s'écrit dans chaque sous-domaine

$$\begin{cases} f_+(\theta) = D \sin(\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}\theta) \\ f_-(\theta) = \frac{A \sin(\sqrt{1 + \alpha(\alpha + \beta)}\theta) + B \cos(\sqrt{1 + \alpha(\alpha + \beta)}\theta)}{\cos(\theta)} \end{cases} \quad (3.37)$$

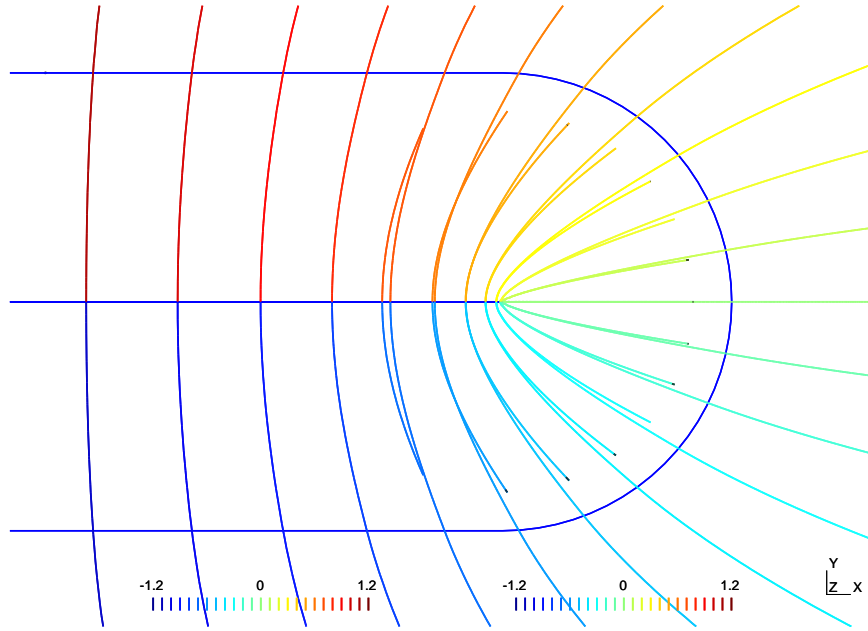


Figure 3.17 – Iso-valeurs du déplacement. Les valeurs sont négatives (en bleu) dans le demi-plan $y < 0$, positives (en rouge) dans le demi-plan $y > 0$ et passent par 0 (en vert) sur la ligne de symétrie. Les courbes couvrant tout le domaine correspondent au résultat numérique. Celles restreintes au voisinage de la pointe de la quasi-fissure correspondent au champ asymptotique analytique. En bleu sont aussi tracés l'iso-zéro de la fonction de niveau (soit le front d'endommagement) et l'iso- ℓ_c . On observe la coïncidence des iso-déplacements autour de la pointe de la quasi-fissure.

La solution recherchée étant supposée bornée, f_- peut s'écrire

$$f_-(\theta) = \tilde{A} \frac{\sin(\sqrt{1 + \alpha(\alpha + \beta)}(\theta - \frac{\pi}{2}))}{\cos(\theta)} \quad (3.38)$$

Cette fonction est bornée sur son domaine de définition ainsi que sa dérivée qui est nulle en $\frac{\pi}{2}$. On en déduit, par les conditions de raccord, la forme de la solution tracée figure 3.18 :

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41 \\ f_+ = \sin(\theta) \\ f_- = -\frac{\sin(\sqrt{2}(\theta - \frac{\pi}{2}))}{\sqrt{2}\cos(\theta)} \end{cases} \quad (3.39)$$

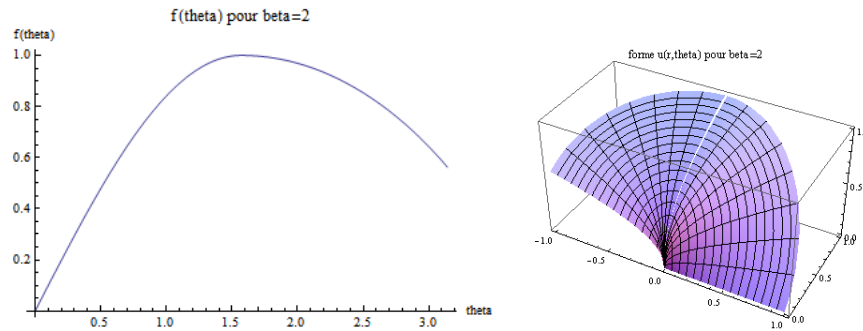


Figure 3.18 – Forme de la solution au problème d’élasticité autour de la pointe de la quasi-fissure pour le profil parabolique ($\beta = 2$). À gauche, la forme de la fonction $f(\theta)$. À droite, une représentation tridimensionnelle du déplacement sur le demi-plan $y > 0$. L’allure est similaire à celle du champ de déplacement autour de la pointe d’une fissure dans un milieu élastique homogène.

3.3 Conclusions

L’étude de la forme du front d’endommagement en propagation auto-similaire dans un milieu infini endommageable sous le modèle TLS montre l’intérêt de deux types de profils d’endommagement particuliers : ceux dont le comportement aux extrémités est linéaire ou parabolique. Dans ces cas, le front semble pouvoir se propager de façon auto-similaire en entraînant derrière lui une quasi-fissure complète, c’est-à-dire qui comporte en son sien un saut de déplacement. Pour des profils d’endommagement ayant une transition trop douce (cubique ou supérieure) entre la zone d’endommagement et le milieu qui l’entoure, cela ne semble pas être vrai.

L’analyse de la réponse élastique d’un milieu quasi-fissuré suivant le modèle TLS avec un profil d’endommagement linéaire ou *parabolique* avec un front d’endommagement circulaire montre que la réponse est similaire à celle d’un milieu élastique homogène fissuré. Le déplacement s’écrit comme une puissance comprise entre 0,25 et 0,5. Ainsi, les déformations divergent et les contraintes s’annulent autour de la pointe de la quasi-fissure.

CHAPITRE 4

EFFETS D'ÉCHELLE ET EFFET DE FORME

Depuis les années soixante-dix, on étudie les *effets d'échelle* dans la réponse mécanique d'éprouvettes homothétiques. En effet, dans [91] on décrit comment le taux de restitution d'énergie critique liée à la propagation d'une fissure dans une éprouvette entaillée *dépend* de la taille de la structure. Plus tard, on comprit l'existence d'un effet semblable pour les éprouvettes non entaillées. Ces deux effets d'échelle sont maintenant appelés de type I — pour les éprouvettes non entaillées — et de type II — pour les entaillées —. Le fait d'avoir deux lois différentes en fonction de l'existence et de la profondeur de l'entaille dévoile un effet de forme. En effet, la transition entre les effets d'échelle de type I et II correspond à la proximité du bord de la structure et du lieu d'initiation de l'endommagement : dans une structure non entaillée, l'endommagement s'initie au bord du domaine alors que dans une éprouvette profondément entaillée, celui-ci apparaît à la pointe de l'entaille et donc loin des bords.

Dans cette partie, on s'intéressera à la capacité du modèle TLS à rendre compte de ce phénomène. Pour ce faire, on commencera par présenter les effets d'échelle et les pistes d'unification proposées dans la littérature. Ensuite, on s'attachera à la confrontation du modèle TLS à ces lois d'effet d'échelle.

4.1 Origines et lois de l'effet d'échelle

Tout d'abord, on définit l'effet d'échelle et on en donne les principales sources possibles. On étudiera ensuite les formes des lois d'effet d'échelle et de bord proposées par divers auteurs.

4.1.1 Définition de l'effet d'échelle

On reprend ici la définition de l'effet d'échelle donnée dans [15]. Considérons une structure de taille caractéristique D — par exemple, la profondeur de l'éprouvette dans le cas d'un chargement de flexion trois points — soumise à un chargement croissant. On note F^{\max} la charge qui entraîne la ruine de la structure sous un chargement monotone quasi-statique. On s'affranchit donc des effets dynamiques et de fatigue. Bien évidemment, cette charge de rupture est dépendante de la taille et de la forme de la structure. On définit alors une contrainte dite *nominale*, que l'on note σ_N et qui dépend aussi bien de la géométrie que de la taille de la structure. Afin d'étudier l'influence de la taille de la structure pour des éprouvettes homothétiques, la définition

de σ_N doit rendre compte de cette homothétie :

$$\begin{cases} \sigma_N = c_N \frac{F}{bD} & \text{pour des homothéties bidimensionnelles} \\ \sigma_N = c_N \frac{F}{D^2} & \text{pour des homothéties tridimensionnelles} \end{cases} \quad (4.1)$$

où b est l'épaisseur des structures bidimensionnelles, F la charge appliquée et c_N un coefficient arbitraire. Il peut être choisi de telle sorte que la valeur de σ_N coïncide avec une valeur caractéristique de la contrainte. Classiquement, pour une éprouvette non entaillée chargée en flexion trois points ayant une distance entre appuis S , on prend

$$c_N = \frac{3}{2} \frac{S}{D} \quad (4.2)$$

afin d'avoir

$$\sigma_N = \frac{3}{2} \frac{FS}{bD^2} \quad (4.3)$$

qui est la contrainte de traction maximale dans la structure si on suppose une distribution linéaire des contraintes dans la profondeur. Il s'agit donc d'une quantification de la contrainte de flexion en négligeant les effets de concentration de contraintes autour de la pointe de la fissure si elle existe. On notera σ_{Nu} la contrainte nominale à rupture. Envisageons deux comportements de σ_{Nu} . Si l'on suppose que le matériau se dégrade lorsque qu'une contrainte maximale est atteinte — par exemple, pour des éprouvettes non entaillées —, alors σ_{Nu} est indépendant de la taille de la structure D . Si le matériau se fissure lorsqu'un facteur d'intensité de contraintes est atteint — pour des éprouvettes fissurées — alors σ_{Nu} devrait suivre un comportement de type $\sigma_{Nu} \sim D^{-1/2}$ afin de respecter le critère de Griffith. Or, les résultats expérimentaux montrent que la contrainte nominale de rupture ne suit ni l'un ni l'autre de ces critères. Deux grandes sources d'explications sont fournies dans la littérature, la déterministe et la statistique. Ces deux approches sont complémentaires : une approche combinée est souvent étudiée pour les lois déterministes proposées. Seule l'approche déterministe sera étudiée en détail et considérée pour l'analyse du modèle TLS. Cependant, les deux sont présentées ci-dessous.

4.1.2 Effet d'échelle statistique

On retrouve les premières traces d'un tel effet dans les travaux de Léonard de Vinci au début du XVI^{ème} siècle. Il constate que la charge à rupture d'une corde sous tension est d'autant plus faible que sa longueur est importante. Ceci met en évidence un effet statistique de la rupture : la contrainte maximale de rupture d'un volume représentatif n'est pas uniforme dans le milieu. Il existe une répartition statistique de celle-ci autour d'une valeur nominale. La présence dans

une zone sous chargement d'éléments avec une contrainte maximale admissible faible conduit à la rupture sous un chargement plus faible. Ainsi la taille de cette zone, et donc la taille de la structure, influence la charge à rupture. Cette théorie est mise en forme par Weibull dans [92]. Rappelons les principes et le résultat principal.

Dans le cas d'un milieu unidimensionnel, la probabilité de rupture s'écrit

$$P_f = 1 - \exp^{-NP_1(\sigma)} \quad (4.4)$$

où N est le nombre de volumes de référence compris dans l'échantillon et $P_1(\sigma)$ la probabilité de rupture de l'un d'entre eux, supposée faible. Cette formule est généralisée à une dimension quelconque en introduisant la *fonction concentration* $c(\sigma)$:

$$P_f = 1 - \exp^{-c(\sigma)V} \quad (4.5)$$

Cette fonction doit être comprise comme la densité de défauts supportant au maximum une contrainte σ . On suppose par ailleurs et de façon empirique que celle-ci vaut

$$c(\sigma) = \frac{1}{V_0} \left\langle \frac{\sigma}{\sigma_0} \right\rangle^m \quad (4.6)$$

avec V_0 un volume de référence, σ_0 une contrainte de référence — nécessaires pour des raisons dimensionnelles — et m un paramètre sans dimension proche de 12. On en déduit la probabilité de rupture

$$P_f = 1 - \exp \left[-\frac{V}{V_0} \left\langle \frac{\sigma}{\sigma_0} \right\rangle^m \right] \quad (4.7)$$

Cette probabilité de rupture conduit à un effet d'échelle qui dépend du nombre de dimensions qui sont proportionnelles à D , que l'on note n_d :

$$\sigma_{Nu} = \sigma_{Nu}^0 \left(\frac{D}{D_0} \right)^{-\frac{n_d}{m}} \quad (4.8)$$

Cette forme d'effet d'échelle reste à l'écart de la notion de zone d'élaboration. Bien qu'il soit possible de l'observer lors de certains essais, ce n'est pas l'origine principale de l'effet d'échelle majoritairement observé dans les essais expérimentaux sur des matériaux quasi-fragiles.

4.1.3 Effet d'échelle déterministe

Lors des essais, on constate de façon récurrente une différence de comportement de la valeur de σ_{Nu} pour les faibles et pour les grandes valeurs de D . Dans le cas des éprouvettes entaillées, la contrainte nominale critique tend vers une valeur constante pour de faibles valeurs de D : le

critère de rupture est un critère en contrainte. Par ailleurs, pour des grandes structures, c'est le critère de Griffith qui s'applique : σ_{Nu} décroît proportionnellement à $D^{-1/2}$.

4.1.3.1 Origines physiques

Bažant et Planas proposent dans [15] quelques explications de l'origine physique de σ_{Nu} , en abordant le sujet du point de vue du taux de restitution d'énergie apparent. Ils supposent que l'avancée d'une zone endommagée de type quasi-fissure entraîne derrière elle non pas une bande d'endommagement mais plutôt un cône d'endommagement. Une avancée du sommet du cône induit une augmentation de la surface endommagée à l'arrière. En supposant que l'angle du cône est indépendant de la taille de la structure, l'augmentation de l'aire endommagée est d'autant plus importante que la structure est grande. Ainsi, l'énergie restituée par l'avancée d'une fissure est plus élevée pour des structures de grande taille. Supposer le taux de restitution d'énergie critique constant permet de conclure que le chargement nécessaire pour atteindre la rupture est plus faible dans une grande structure que dans une petite.

Une autre façon de voir l'origine physique de l'effet d'échelle est présentée dans [14] et s'appuie sur la notion de zone d'élaboration. Si celle-ci est suffisamment petite par rapport à la taille de la structure, il est raisonnable d'appliquer la théorie de Griffith. En revanche, lorsque la structure devient petite et proche de la taille de la zone d'élaboration, le solide ne peut plus être considéré homogène et la mécanique linéaire élastique de la rupture ne peut plus s'appliquer. De plus, on peut supposer que dans la zone d'élaboration, l'état de chargement ne peut pas être très différent entre deux points proches. Ainsi, on tend vers un état de chargement uniforme dans le ligament de l'éprouvette. La structure ne peut donc plus être sensible qu'à une contrainte maximale de rupture.

4.1.3.2 Lois d'effets d'échelle

Les deux comportements asymptotiques présentés précédemment font pratiquement l'unanimité. Lorsque la ruine de l'éprouvette n'a pas lieu à partir d'un bord du domaine, deux comportements asymptotiques différents peuvent être identifiés pour $D \rightarrow 0$ et pour $D \rightarrow +\infty$. Or le fait d'avoir deux comportements asymptotiques distincts implique l'existence d'une longueur caractéristique et rejoint donc la notion de zone d'élaboration. Donnons-en une preuve par l'absurde [14].

4.1.3.2.1 Besoin d'une longueur caractéristique Considérons trois éprouvettes de même géométrie, soumise au même type de chargement et de trois tailles différentes que l'on note D_1 ,

D_2 et D_3 . Si l'on considère D_1 comme étant la référence, on peut affirmer que

$$F_2^{\max} = F_1^{\max} f(D_2/D_1) \quad \text{et que} \quad F_3^{\max} = F_1^{\max} f(D_3/D_1) \quad (4.9)$$

où F_i^{\max} est la force maximale admissible par la structure de taille D_i . Or, si l'on suppose que le matériau n'a pas de longueur caractéristique, il est aussi légitime de considérer D_2 comme étant la référence et alors

$$F_3^{\max} = F_2^{\max} f(D_3/D_2).$$

On en déduit

$$\forall(D_2, D_3) \quad \frac{f\left(\frac{D_3}{D_1}\right)}{f\left(\frac{D_2}{D_1}\right)} = f\left(\frac{D_3}{D_2}\right) \quad (4.10)$$

Comme D_2 et D_3 sont quelconques, l'équation obtenue est une équation fonctionnelle dont la solution est

$$f(D) = \left(\frac{D}{c}\right)^s \quad (4.11)$$

où c est une longueur et s une constante sans dimension. Remarquons que la grandeur c n'apparaît pas dans l'équation 4.10 et ne joue donc pas de rôle physique. Si une telle relation était acceptable, elle devrait être valable pour les grandes et les petites éprouvettes et devrait donc pouvoir vérifier les deux comportements asymptotiques : le critère en contrainte, soit $s = 0$, et le critère de Griffith, soit $s = -1/2$. Cette condition étant impossible, on en déduit que le matériau a une longueur caractéristique propre.

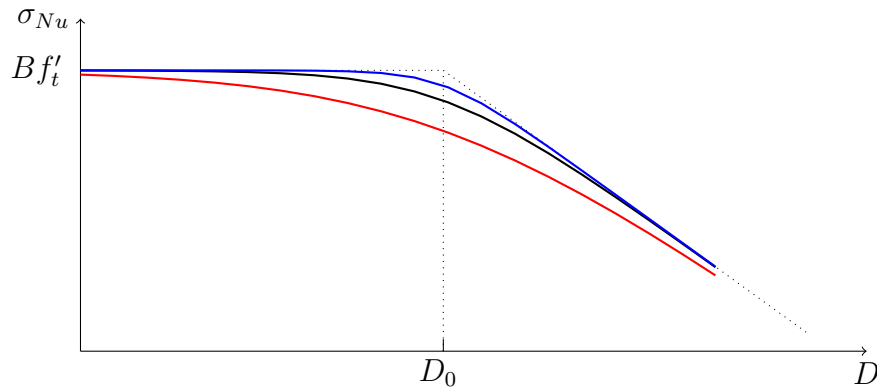


Figure 4.1 – Loi d'effet d'échelle de Bažant. Les deux échelles sont logarithmiques. Les traits pointillés correspondent aux deux asymptotes. La courbe noire correspond à la loi classique ($r = 1$), la bleu à $r = 2$ et la rouge à $r = 0,5$.

4.1.3.2.2 Effet d'échelle de type II La loi la plus simple vérifiant les deux comportements asymptotiques donnés précédemment est proposée dans [12] :

$$\sigma_{Nu} = \frac{B f'_t}{\sqrt{1 + D/D_0}} \quad (4.12)$$

où f'_t est la résistance en traction du matériau, D_0 une longueur caractéristique et B un coefficient dépendant de la géométrie. L'allure de la contrainte nominale à rupture en fonction de la taille de la structure est donnée en figure 4.1. Cette loi respecte les deux comportement asymptotiques voulus. D'autres lois plus complexes sont aussi valables, comme celle proposée dans [13] qui inclut un coefficient adimensionnel r qui pilote le comportement intermédiaire.

$$\sigma_{Nu} = B f'_t \left[1 + \left(\frac{D}{D_0} \right)^r \right]^{-\frac{1}{2r}} \quad (4.13)$$

Plus la valeur de r est élevée, plus la transition entre les deux asymptotes est brutale. Remarquons que cette deuxième loi, proposée il y a trente ans, n'a pas suscité d'intérêt particulier dans la communauté. En effet, le coefficient trouvé lors d'identifications expérimentales est souvent proche de 1, ce qui ramène à l'expression classique, plus simple. De plus, lors des essais, il est difficile d'obtenir une précision suffisante pour fournir une valeur de r pour laquelle on pourrait chercher un sens physique ou théorique.

4.1.3.2.3 Effet d'échelle de type I En ce qui concerne les éprouvettes non entaillées dont la ruine arrive avant l'apparition d'une fissure macroscopique, une autre loi est proposée dans [7] en considérant que la contrainte maximale doit être atteinte, non pas sur le bord, mais légèrement à l'intérieur du domaine, dans une zone représentant la zone d'élaboration. La taille de cette zone à la charge maximale est notée l_f et on obtient alors

$$\sigma_{Nu} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - 4l_f/D}} \quad (4.14)$$

Cette loi n'est pas applicable lorsque D tend vers 0. Bien que représenter de telles structures ne soit pas l'objectif de la loi — une structure plus petite que la taille caractéristique de la zone d'élaboration sort clairement du domaine de modèle continu pour des matériaux comme le béton — il est préféré dans [10] d'en fournir une version qui ne pose pas de problème de définition mathématique :

$$\sigma_{Nu} = \sigma_0 \left(1 + \frac{1}{\gamma + \frac{D}{2l_f}} \right) \quad (4.15)$$

où γ est un coefficient arbitraire. Dans [6] est fournie une autre version acceptable pour tout D mais introduisant un paramètre supplémentaire r :

$$\sigma_{Nu} = \sigma_0 \left(1 + \frac{rD_b}{D + l_p} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (4.16)$$

De même que les lois d'effet d'échelle de type II, celles-ci peuvent être combinés avec la loi statistique de Weibull.

4.1.3.3 Lois d'effet d'échelle *universelle*

Il existe donc deux types d'effets d'échelle avec des lois distinctes. Ceci révèle l'existence de deux effets qui se superposent : d'une part un effet d'échelle et d'autre part un effet de bord. Autrement dit, il doit exister une transition continue entre les types I et II de l'effet d'échelle. Différentes tentatives ont été menées pour obtenir une loi unifiée que Bazant appelle *universelle*. D'abord dans [8, 16] et plus tard dans [17], sont proposées des lois qui n'arrivent pas à représenter de façon satisfaisante les résultats expérimentaux [45]. Ainsi, une nouvelle version y est proposée comportant un nouveau paramètre empirique. Cette loi s'écrit

$$\sigma_{Nu} = \left(1 + \frac{E'G_f}{g_0D + (1 - \lambda)c_f g'_0 + \lambda E'G_f / f_t'^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{r\lambda D_b}{\sqrt{\bar{D} + l_p}} \right]^{\frac{1}{r}} \quad (4.17)$$

avec

$$\lambda = \exp^{\alpha_0^k [(\bar{D}/d_a)^p / q]} \quad (4.18)$$

où G_f , c_f , f_r^∞ , D_b , r , p , q , l_p et l_s sont des paramètres à déterminer, α_0 est la taille relative de l'entaille initiale par rapport à la profondeur de la structure, d_a est la taille des granulats, g est le taux de restitution d'énergie adimensionné provenant de la mécanique linéaire élastique de la rupture et \bar{D} est une longueur proche de la profondeur de la structure et définie comme suit [45]

$$\bar{D} = \frac{2\varepsilon}{\psi \varepsilon_{,n}} \quad (4.19)$$

où ε est la déformation, $\varepsilon_{,n}$ son gradient suivant la normale à la frontière du domaine à l'endroit de la fissuration et en négligeant la concentration de contraintes due à la présence de la fissure dans la résolution du problème d'élasticité et ψ est un facteur géométrique valant 1 pour des éprouvettes infiniment élancées. Cette loi semble être capable de rendre compte des résultats expérimentaux [44, 45].

4.2 TLS et effet d'échelle

Dans la partie précédente ont été présentés les deux types d'effet d'échelle et une loi, dite universelle, qui est censée résumer les deux autres. Cependant, seulement la loi d'effet d'échelle de type II donnée en (4.12) fait l'unanimité. Ainsi, on se contentera dans cette partie d'analyser la capacité du modèle TLS à représenter l'effet d'échelle de type II, en le comparant aux deux lois données (4.12) et (4.13). Cette deuxième loi est maintenue car elle inclut la première — lorsque le paramètre r vaut 1 —.

En prenant comme exemple la géométrie et les propriétés matériaux des éprouvettes de la campagne expérimental de [36], on a testé la capacité du modèle TLS à rendre compte de l'effet d'échelle. Dans cette campagne, des éprouvettes d'une épaisseur de 50 mm et ayant une profondeur allant de 50 à 400 mm avec une entaille allant de 0 à un demi de la profondeur, ont été testées sous un chargement de flexion trois points. La taille maximale des granulats est d'environ 14 mm. La profondeur relative de l'entaille est donnée par un entier noté i tel que

- $i = 1$: éprouvettes entaillées jusqu'à la moitié de la profondeur
- $i = 2$: éprouvettes entaillées jusqu'à un cinquième de la profondeur
- $i = 3$: éprouvettes non entaillées

Leur taille est caractérisée par un entier n , allant de 1 à 4, de telle sorte que la profondeur de l'éprouvette n vaut

$$D_n = 400 \cdot 2^{1-n} \text{ mm} \quad (4.20)$$

À cette fin, différentes éprouvettes de taille caractéristique comprise entre 25 et 3200 mm ont été simulées sous le modèle TLS en gardant les mêmes proportions et notations que les éprouvettes de [36]. Ainsi, n prendra des valeurs comprises entre -2 et 5 . La valeur inférieure de taille est bien au-delà de la limite de l'hypothèse de milieu continu : un volume élémentaire ne peut être représentatif si sa taille est en deçà de la taille des granulats. Or, la plus petite éprouvette n'est que deux fois plus profonde que la taille maximale des granulats. Ces cas ont été conservés afin d'observer les limites du modèle et aussi de son implémentation à l'état actuel. La loi d'effet d'échelle étant *a priori* insensible à cette limite physique, on s'attend à ce que les simulations permettent de capter l'asymptote de la loi d'effet d'échelle (4.12) pour $D \rightarrow 0$.

4.2.1 Comportement fragile

Le choix d'une fonction d'adoucissement constante et unitaire conduit à un comportement fragile. Dans ce cas, il est possible d'établir une relation simple entre les propriétés du modèle d'endommagement TLS, Y_c et ℓ_c , et les propriétés fournies dans [36], f'_t et G_f . On impose que l'endommagement s'initie dans le cas d'une barre en traction lorsque la charge atteint la valeur

maximale en traction f'_t . On en déduit la valeur du taux de restitution d'énergie local critique Y_c . Par ailleurs, la propagation autosimilaire d'une quasi-fissure doit correspondre à un taux de restitution d'énergie critique cohérent avec celui de Griffith G_f .

$$\begin{cases} Y_c = \frac{1}{2} E f'_t \\ G_f = 2Y_c \ell_c \int_0^1 d(\hat{\phi}) d\hat{\phi} \end{cases} \quad (4.21)$$

Ainsi, à partir des données fournies dans [36], on déduit les grandeurs utilisées dans les simulations TLS. Pour les profils symétriques :

$$\begin{cases} f'_t = 3,9 \text{ MPa} \\ G_f \simeq 45 \text{ N/m} \\ E = 37 \text{ GPa} \end{cases} \implies \begin{cases} Y_c = 200 \text{ Pa} \\ \ell_c = 250 \text{ mm} \end{cases} \quad (4.22)$$

et pour le profil non-symétrique POLY2, pour lequel $\int_0^1 d(\hat{\phi}) d\hat{\phi} = 2/3$, on a

$$\begin{cases} Y_c = 200 \text{ Pa} \\ \ell_c = 375 \text{ mm} \end{cases} \quad (4.23)$$

Les résultats pour les éprouvettes entaillées à un cinquième sont fournis dans les tableaux 4.I, 4.II et 4.III pour différents profils d'endommagement, un linéaire (nommé LINEAR) et deux dits *paraboliques* en $d = 1^-$, l'un symétrique (nommé POLY3) et l'autre non (POLY2). Dans les tableaux comme dans [36], α est la profondeur relative de l'entaille. Les résultats, similaires pour les trois profils, sont tracés dans la figure 4.2. L'identification des paramètres de la loi d'effet d'échelle de Bažant généralisée (4.13) est faite par la méthode des moindres carrés en échelle logarithmique. On en déduit les valeurs présentées dans le tableau 4.IV. On remarque que pour

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
D (mm)	3200	1600	800	400	200	100	50	25
αD (mm)	640	320	160	80	40	20	10	5
F^{\max} (kN)	69.5	49.1	34.5	24.5	16.3	10.8	6.1	3.1
σ_{Nu} (MPa)	2.5	3.6	5.1	7.2	9.6	12.7	14.3	14.5

Tableau 4.I – Résultats de chargement maximal et de contrainte nominale à rupture pour des simulations TLS d'éprouvettes entaillées de profondeur un cinquième du ligament ($i = 2$) avec le profil d'endommagement LINEAR et un comportement fragile. Les valeurs en italique ont une faible précision en raison du bruit dans la courbe force-ouverture extraite de la simulation.

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
D (mm)	3200	1600	800	400	200	100	50	25
αD (mm)	640	320	160	80	40	20	10	5
F^{\max} (kN)	54.9	36.6	25.0	17.5	<i>12.2</i>	8.1	<i>5.2</i>	<i>2.6</i>
σ_{Nu} (MPa)	2.0	2.7	3.7	5.1	<i>7.1</i>	9.5	<i>12.2</i>	<i>12.2</i>

Tableau 4.II – Résultats de chargement maximal et de contrainte nominale à rupture pour des simulations TLS d'éprouvettes entaillées de profondeur un cinquième du ligament ($i = 2$) avec le profil d'endommagement POLY2 et un comportement fragile. Les valeurs en italique ont une faible précision en raison du bruit dans la courbe force-ouverture extraite de la simulation.

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
D (mm)	3200	1600	800	400	200	100	50	25
αD (mm)	640	320	160	80	40	20	10	5
F^{\max} (kN)	58.8	41.7	29.2	<i>21,2</i>	<i>14,5</i>	<i>9,6</i>	<i>5,5</i>	<i>2,8</i>
σ_{Nu} (MPa)	2.2	3.1	4.3	<i>6,2</i>	<i>8,2</i>	<i>11,3</i>	<i>12,9</i>	<i>13,1</i>

Tableau 4.III – Résultats de chargement maximal et de contrainte nominale à rupture pour des simulations TLS d'éprouvettes entaillées de profondeur un cinquième du ligament ($i = 2$) avec le profil d'endommagement POLY3 et un comportement fragile. Les valeurs en italique ont une faible précision en raison du bruit dans la courbe force-ouverture extraite de la simulation.

les trois lois les résultats sont assez proches. Dans ce sens, on peut affirmer que le modèle TLS est capable de rendre compte d'un certain effet d'échelle quel que soit le profil d'endommagement choisi et ce pour le comportement le plus simple, c'est-à-dire un comportement local fragile. Notamment, les deux comportements asymptotiques peuvent être identifiés. Il faut cependant rester critique envers les résultats pour des petites structures. En effet, on ne saurait affirmer que le comportement observé correspond à une asymptote horizontale et non à une pente de coefficient faible, qui pourrait aussi bien correspondre à la loi de Bažant qu'à celle de Weibull. De plus, le coefficient r reste lui aussi relativement constant et a des valeurs bien supérieures à celle de la loi classique de Bažant pour laquelle $r = 1$.

nom	POLY3	LINEAR	POLY2
$d(\hat{\phi})$	$\hat{\phi}^2(3 - 2\hat{\phi})$	$\hat{\phi}$	$\hat{\phi}(2 - \hat{\phi})$
Bf'_t (MPa)	13,2	14,8	13,0
D_0 (mm)	85	94	67
r	3,0	2,3	1,9

Tableau 4.IV – Comparaison entre les paramètres de la loi généralisée d'effet d'échelle de Bažant pour des éprouvettes entaillées de profondeur un cinquième ($i = 2$) avec un comportement d'endommagement fragile.

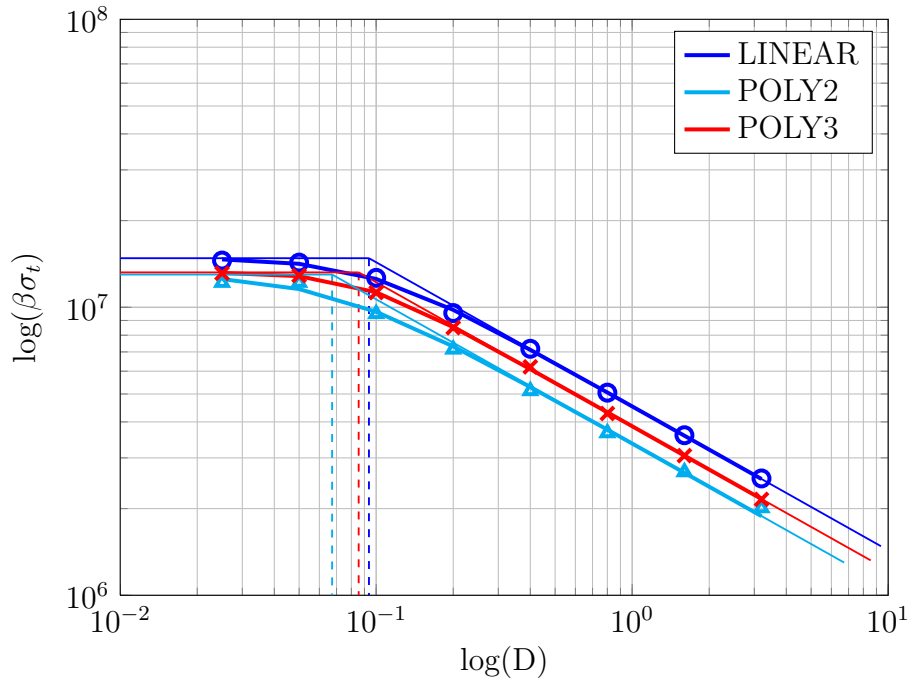


Figure 4.2 – Résultats d’effet d’échelle du modèle TLS avec un comportement fragile et pour des éprouvettes entaillées à un cinquième de leur épaisseur. Les résultats pour trois profils d’endommagement sont donnés.

Le modèle TLS semble donc capable de rendre compte de l’effet d’échelle d’un point de vue asymptotique mais non de représenter le comportement intermédiaire avec une fonction d’adoucissement unitaire et donc un comportement local fragile.

4.2.2 Comportement adoucissant ou durcissant

On s’intéresse donc à des comportements adoucissants comme ceux présentés dans la partie 1.3.3. On se contente des résultats d’effet d’échelle correspondants au profil d’endommagement POLY3 et au comportement d’écrouissage avec $k = 5$, soit

$$\begin{cases} h(d) = 1 + 5d \\ d(\hat{\phi}) = \hat{\phi}^2(3 - 2\hat{\phi}) \end{cases} \quad (4.24)$$

Les résultats sont présentés dans le tableau 4.V et les valeurs d'identification par la méthode des moindres carrés en échelle logarithmique sont résumés ci-dessous :

$$\begin{cases} Bf'_t = 13.7 \text{ MPa} \\ D_0 = 173 \text{ mm} \\ r = 4.4 \end{cases} \quad (4.25)$$

Les valeurs sont différentes de celles obtenues précédemment pour un comportement fragile. D'une part, la longueur caractéristique est plus élevée que précédemment, ce qui laisse comprendre qu'il serait possible de piloter cette grandeur par le choix des paramètres de simulation TLS, notamment le coefficient d'adoucissement. D'autre part, le coefficient d'effet d'échelle r reste trop élevé pour pouvoir être satisfait de la représentation de l'effet d'échelle que fournit le modèle TLS sous ces conditions. D'autres essais ont été menés pour d'autres valeurs de k sans que les résultats ne soient concluants. Il semble donc intéressant de se tourner vers d'autres méthodes pour obtenir du modèle TLS une bonne représentation de l'effet d'échelle de type II.

4.3 Conclusions

Le modèle TLS s'est montré capable de reproduire le comportement asymptotique de l'effet d'échelle mais ne reproduit pas fidèlement l'ensemble de celui-ci, que ce soit avec une fonction d'adoucissement constante ou affine en la variable d'endommagement. Bien qu'il reste donc un bon candidat à la prédiction du comportement de matériaux quasi-fragiles, un travail plus profond doit être mené afin de trouver une fonction d'adoucissement qui rende le modèle TLS apte à reproduire correctement les phénomènes d'effet d'échelle et de bord. Ce travail fait l'objet de la partie suivante.

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
D (mm)	3200	1600	800	400	200	100	50	25
αD (mm)	640	320	160	80	40	20	10	5
F^{\max} (kN)	88.8	61.7	42.6	31.2	20.3	11.9	5.8	2.9
σ_{Nu} (MPa)	3.2	4.5	6.2	9.1	11.9	13.9	13.6	13.6

Tableau 4.V – Résultats de chargement maximal et de contrainte nominale à rupture pour des simulations TLS d'éprouvettes entaillées de profondeur un cinquième du ligament ($i = 2$) avec le profil d'endommagement POLY3 et un comportement adoucissant donné par $h(d) = 1 + 5d$. Les valeurs en italique ont une faible précision en raison du bruit dans la courbe force-ouverture extraite de la simulation.

CHAPITRE 5

COMPARAISON ENTRE LE MODÈLE COHÉSIF ET L'ENDOMMAGEMENT TLS

Le modèle de fissure cohésive, présenté dans la partie 1.1.3, a récemment été confronté à une comparaison avec des résultats expérimentaux [44] qui a confirmé l'intérêt du modèle cohésif dans la représentation des effets d'échelle et de bord. Dans cette partie, on s'intéresse à une comparaison entre les modèles cohésif et TLS ayant pour objectif de déterminer une fonction d'adoucissement qui permette aux résultats des simulations TLS d'être proches de ceux des simulations cohésives. On espère ainsi rendre le modèle TLS capable de représenter les deux phénomènes.

On commence par rappeler les définitions des modèles cohésif et TLS. En effet, ceux-ci seront étudiés sous un angle plus général que précédemment afin d'établir des relations entre les deux modèles qui soient le plus souples possible. Ensuite, la méthode utilisée est exposée et finalement on particularise la méthode pour un certain choix de fonctions et de paramètres qui correspondent à l'utilisation usuelle faite jusqu'à présent ou aux choix de fonctions cohésives bien connues et qui ont déjà fait leurs preuves. Cette comparaison a été publiée en 2015 [68].

5.1 Modèles cohésif et TLS

L'ensemble des études supposent un chargement quasi-statique et des petites déformations. Les définitions et équations régissant le comportement des deux modèles sont rappelées dans le cadre d'une structure unidimensionnelle. En effet, on s'intéresse à une barre de longueur $2L$ — la coordonnée spatiale x est comprise entre $-L$ et L — et de module de Young E . L'endommagement de la barre se produit en $x = 0$ pour le modèle cohésif et la bande d'endommagement apparaît en ce point pour le modèle TLS et est supposée évoluer de façon symétrique. Dans les deux cas, on note $u(x)$ le déplacement de la barre et en particulier $u(L) = u_L$ le déplacement de l'extrémité de la barre. Les notations classiques ε et σ pour la déformation et la contrainte sont aussi utilisées.

5.1.1 Modèle cohésif

Avec le modèle cohésif, le déplacement dans la barre est discontinu et on note w l'ouverture de la zone cohésive de telle sorte que $w = 2u(0^+)$. L'énergie libre de la zone cohésive s'écrit

$$\Phi_{\text{CZM}}(w, \alpha) = \frac{1}{2} g_{\text{CZM}}(\alpha) k w^2 \quad (5.1)$$

où $k > 0$ et g_{CZM} est une fonction adimensionnée décroissante qui caractérise la raideur de la zone cohésive. On en déduit les quantités duales σ et A

$$\sigma = \frac{\partial \Phi_{CZM}}{\partial w} = g_{CZM}(\alpha)kw \quad (5.2)$$

$$A = -\frac{\partial \Phi_{CZM}}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2}g'_{CZM}(\alpha)kw^2 \quad (5.3)$$

L'évolution de α est pilotée par le critère $f_{CZM}(A, \alpha) = A - A_c(\alpha)$ avec la loi associée

$$f_{CZM}(A, \alpha) \leq 0, \quad \dot{\alpha} \geq 0 \quad \text{et} \quad f_{CZM}(A, \alpha)\dot{\alpha} = 0 \quad (5.4)$$

où $A_c(\alpha)$ est supposé borné pour tout α . Le modèle dépend de deux paramètres fonctionnels : $g_{CZM}(\alpha)$ et $A_c(\alpha)$. Si l'on admet que leur forme est connue et que l'on suppose l'unicité de l'évolution de α pour toute histoire d'ouverture, alors on peut définir une fonction f , qui définit une courbe traction-ouverture σ - w . Elle décrit la contrainte de traction dans la zone cohésive en fonction de l'ouverture pour une ouverture imposée monotone croissante.

$$\sigma = f(w) \quad (5.5)$$

La relation qui relie g_{CZM} , A_c et f s'écrit à partir des équations (5.2), (5.3), (5.4) et (5.5) :

$$\forall \alpha, \quad kg_{CZM}(\alpha)\sqrt{\frac{-2A_c(\alpha)}{kg'_{CZM}(\alpha)}} = f\left(\sqrt{\frac{-2A_c(\alpha)}{kg'_{CZM}(\alpha)}}\right) \quad (5.6)$$

On se limite ici à des comportements cohésifs ayant une raideur initiale infinie. Pour $\alpha = 1$, celle-ci est supposée nulle (cf. figure 5.1).

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_{CZM}(\alpha) = +\infty \quad \text{et} \quad g_{CZM}(1) = 0 \quad (5.7)$$

On définit deux valeurs caractéristiques du comportement, σ_f et w_f que l'on suppose finies.

$$w_f = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} w(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{-2A_c(\alpha)}{kg'_{CZM}(\alpha)}} \quad (5.8)$$

$$\sigma_f = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sigma(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(g_{CZM}(\alpha) \sqrt{\frac{-2kA_c(\alpha)}{g'_{CZM}(\alpha)}} \right) \quad (5.9)$$

Ainsi, la monotonie de $g_{CZM}(\alpha)$ et (5.7) impliquent

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g'_{CZM}(\alpha) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} w(\alpha) = 0 \quad (5.10)$$

On définit alors la fonction traction-ouverture adimensionnée F , dont un exemple est tracé en figure 5.1, à partir de ces grandeurs et de la fonction f

$$\sigma = f(w) = \sigma_f F\left(\frac{w}{w_f}\right) \quad (5.11)$$

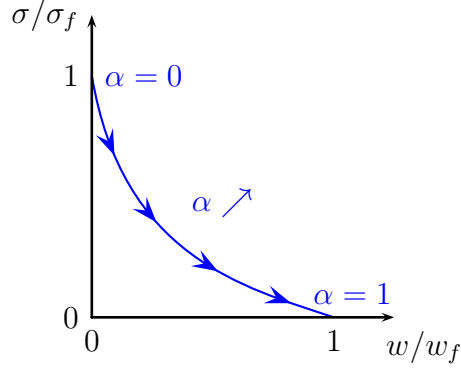


Figure 5.1 – Comportement d’une zone cohésive classique pour une ouverture imposée croissante.

5.1.2 Modèle d’endommagement TLS

Considérons maintenant que la dégradation de la barre est représentée par le modèle TLS. La zone endommagée est supposée occuper le lieu $x \in [-\ell; \ell]$ où ℓ est la position du front d’endommagement. L’énergie libre locale de la barre s’écrit

$$\Phi_{\text{dam}}(\varepsilon, d) = \frac{1}{2} g_{\text{CDM}}(d) E \varepsilon^2 \quad (5.12)$$

avec g_{CDM} une fonction adimensionnelle décroissante vérifiant $g_{\text{CDM}}(0) = 1$ et qui caractérise la raideur restante locale pour une valeur d’endommagement d donnée. On en déduit la contrainte σ et le taux de restitution d’énergie local Y

$$\sigma = \frac{\partial \Phi_{\text{dam}}}{\partial \varepsilon} = g_{\text{CDM}}(d) E \varepsilon \quad (5.13)$$

$$Y = -\frac{\partial \Phi_{\text{dam}}}{\partial d} = -\frac{1}{2} g'_{\text{CDM}}(d) E \varepsilon^2 \quad (5.14)$$

On se donne le critère d’évolution de l’endommagement local $f_{\text{CDM}}(Y, d) = Y - h(d)Y_c$ et une loi associée

$$f_{\text{CDM}}(Y, d) \leq 0, \quad \dot{d} \geq 0 \quad \text{et} \quad f_{\text{CDM}}(Y, d) \dot{d} = 0 \quad (5.15)$$

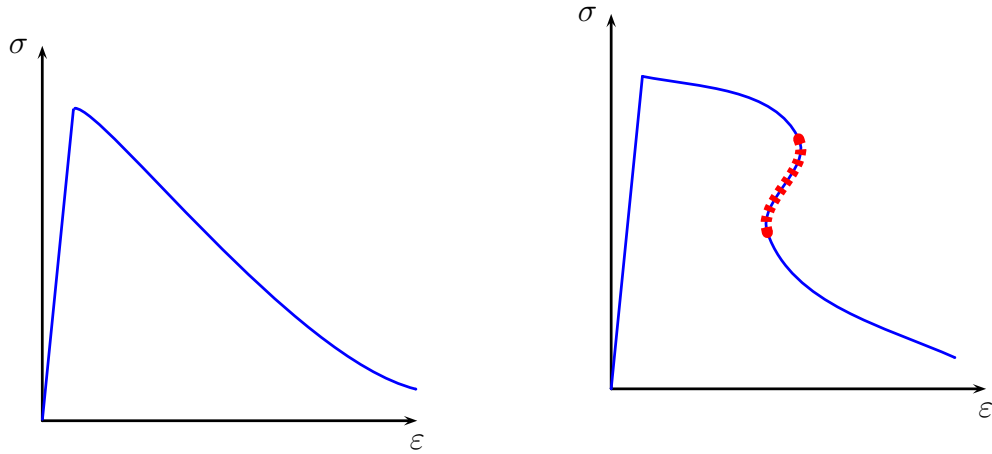
La valeur de Y_c est constante. La dépendance du taux de restitution d'énergie en la variable d'endommagement d est concentrée dans la fonction d'adoucissement adimensionnelle $h(d)$. Les fonctions $g_{\text{CDM}}(d)$ and $h(d)$ permettent de définir un modèle d'endommagement local. Si on les suppose connues, on peut tracer une courbe de comportement contrainte-déformation locale $\sigma = f(\varepsilon)$ qui décrit la réponse locale à une déformation imposée croissante. Un exemple d'une telle courbe est donné en figure 5.2a. La fonction d'adoucissement est choisie unitaire pour un endommagement nul $h(0) = 1$. Ainsi, l'endommagement démarre lorsque le taux local de restitution d'énergie vaut Y_c . Afin d'assurer l'existence d'une histoire d'endommagement unique pour toute histoire de déformation, h doit vérifier

$$g''_{\text{CDM}} h - g'_{\text{CDM}} h' \geq 0 \quad (5.16)$$

Ceci correspond à des courbes sans retour en arrière ou *snap-back*. Si la contrainte σ décroît alors que l'endommagement d augmente, la déformation ε doit être croissante

$$\begin{cases} \dot{\sigma} < 0 \\ \dot{d} > 0 \end{cases} \implies \dot{\varepsilon} > 0 \quad (5.17)$$

Un exemple de courbe contrainte-déformation ne respectant pas cette condition est tracée en figure 5.2b.



(a) Courbe contrainte-déformation obtenue à partir d'une fonction d'adoucissement h continue et vérifiant la condition 5.16.

(b) Courbe contrainte-déformation obtenue à partir d'une fonction d'adoucissement h ne vérifiant pas la condition 5.16. Le pointillé rouge correspond à la partie de la courbe à l'origine du manque d'unicité.

Figure 5.2 – Courbes contrainte-ouverture.

Considérons maintenant le modèle TLS. On se donne le profil d'endommagement $d(\hat{\phi})$ et le critère et la loi d'évolution s'écrivent

$$f_{\text{TLS}} = \overline{f_{\text{CDM}}} = \frac{\int_{\phi=0}^{\ell} f_{\text{CDM}}(Y, d) d_{,\phi}(\phi) d\phi}{\int_{\phi=0}^{\ell} d_{,\phi}(\phi) d\phi}, \quad f_{\text{TLS}} \leq 0, \quad \dot{\ell} \geq 0 \quad \text{et} \quad f_{\text{TLS}} \dot{\ell} = 0 \quad (5.18)$$

Le tableau 5.I résume les paramètres des deux modèles, TLS et cohésif. Un exemple des déplacements dans la barre sous les deux modèles est tracé en figure 5.3.

modèle cohésif	modèle d'endommagement
$g_{\text{CZM}}(\alpha)$	$g_{\text{CDM}}(d)$
$A_c(\alpha)$	$h(d)$
	modèle TLS
	$d(\phi), \ell_c$

Tableau 5.I – Résumé des fonctions cohésives, d'endommagement et TLS.

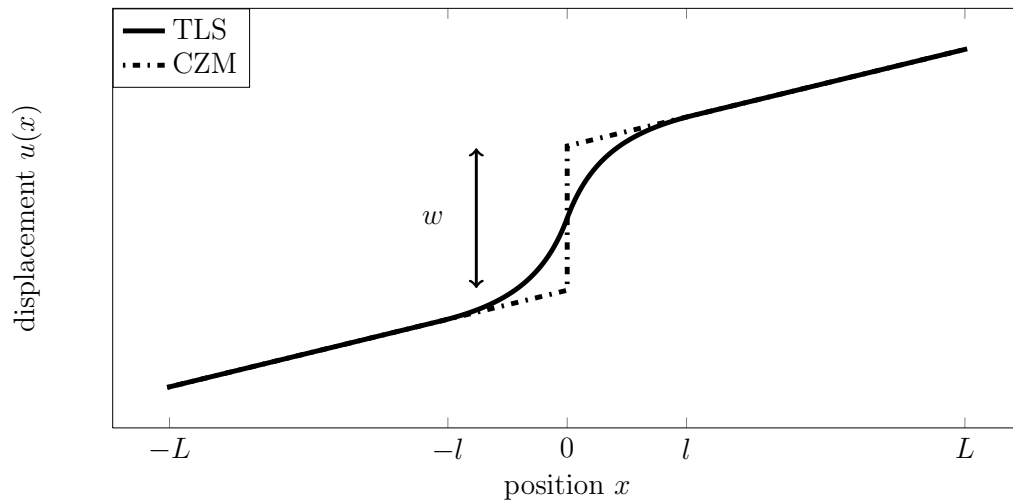


Figure 5.3 – Déplacement sur l'ensemble de la barre partiellement endommagée à un état de chargement donné. Les modèles TLS et cohésif sont représentés.

5.2 Comparaison et équivalence unidimensionnelle

Dans cette partie, on compare la réponse de la barre sous les deux modèles de dégradation. On cherche à établir des relations entre les paramètres des modèles permettant d'obtenir des réponses *équivalentes* dans le cas de la barre. On dit de deux réponses qu'elles sont équivalentes

si, sous un déplacement u_L imposé à l'extrémité de la barre évoluant de façon quasi-statique, la contrainte, l'énergie et la dissipation sont les mêmes pour les deux modèles [22, 53, 54, 87]. Une telle analyse a déjà été menée dans [52] en comparant le modèle d'endommagement d'ordre supérieur et le modèle cohésif. Afin d'établir une telle équivalence, on donne dans un premier temps la réponse de la barre sous chacun des modèles. Les relations en sont déduites ensuite. Finalement, on s'intéressera à quelques paramètres fonctionnels particuliers. On se contente de l'étude de la demi barre $[0; L]$.

5.2.1 Modèle de zone cohésive

L'équilibre impose l'uniformité de la contrainte σ . Le déplacement à l'extrémité de la barre s'écrit

$$u_L^{\text{CZM}} = \int_{x=0^+}^L \varepsilon_{\text{CZM}} dx + \frac{w}{2} = \frac{L\sigma}{E} + \frac{\sigma}{2kg_{\text{CZM}}(\alpha)} \quad (5.19)$$

où la deuxième égalité se déduit de la relation de comportement du modèle. L'énergie de la demi-barre comporte deux termes : la contribution de l'énergie élastique de la barre et l'énergie de la zone cohésive.

$$\mathcal{E}_{\text{CZM}}(u, w, \alpha) = \int_{x=0^+}^L \frac{1}{2} E \varepsilon(u)^2 dx + \frac{1}{2} \Phi_{\text{CZM}}(w, \alpha) = \frac{t^2 L}{2E} + \frac{t^2}{2g_{\text{CZM}}(\alpha)k} \quad (5.20)$$

La dissipation liée à l'évolution de α s'écrit

$$\mathcal{D}_{\text{CZM}} = \frac{1}{2} A \dot{\alpha} = \frac{1}{2} A_c(\alpha) \dot{\alpha} \quad (5.21)$$

5.2.2 Modèle TLS

Les mêmes calculs que pour la réponse de la barre sous le modèle cohésif sont maintenant menés pour le modèle TLS. La contrainte est toujours uniforme. Le déplacement de l'extrémité de la barre s'écrit

$$u_L^{\text{TLS}} = \int_{x=0}^L \varepsilon_{\text{TLS}} dx = \int_0^L \frac{\sigma}{E g_{\text{CDM}}(d)} dx \quad (5.22)$$

et l'énergie de la demi-barre

$$\mathcal{E}_{\text{TLS}}(u, d) = \int_{x=0}^L \Phi_{\text{dam}}(u, d) dx = \int_{x=0}^L \frac{\sigma^2}{2g_{\text{CDM}}(d)E} dx \quad (5.23)$$

La dissipation liée à l'avancée de la position du front ℓ vaut

$$\mathcal{D}_{\text{TLS}}(Y, \dot{d}) = \int_{x=0}^L Y \dot{d} dx = Y_c \dot{\ell} \int_{\phi=0}^{\ell} h(d) d_{,\phi}(\phi) d\phi \quad (5.24)$$

Remarquons que dans ce cas unidimensionnel de la barre, la courbure du front est nulle et la fonction de niveau en un point s'écrit facilement en fonction de la coordonnée du point x et de la position du front d'endommagement ℓ

$$\phi = \ell - x \quad (5.25)$$

De plus, l'endommagement au centre de la barre, qui est l'endommagement maximal vaut $d(\ell/\ell_c)$.

5.2.3 Relations d'équivalence

On a déterminé le déplacement u_L , l'énergie de la demi-barre \mathcal{E} et la dissipation \mathcal{D} associée à l'évolution de la dégradation, pilotée par α ou ℓ , pour les deux modèles. L'égalité de ces différentes grandeurs conduit au système (5.26) et (5.27). Afin de compléter le système, il est nécessaire d'y ajouter la loi de normalité pour l'un des modèles, la deuxième étant redondante (5.28).

$$\frac{1}{2kg_{\text{CZM}}(\alpha)} = \frac{1}{E} \int_{\phi=0}^{\ell} \left(\frac{1}{g_{\text{CDM}}(d(\phi/\ell_c))} - 1 \right) d\phi \quad (5.26)$$

$$\frac{1}{2}A_c(\alpha)\dot{\alpha} = Y_c \ell \int_{\tilde{d}=0}^{d(\ell)} h(\tilde{d}) d\tilde{d} \quad (5.27)$$

$$A_c(\alpha)\dot{\alpha} = -\frac{\sigma^2}{2k} \frac{g'_{\text{CZM}}(\alpha)}{g_{\text{CZM}}^2(\alpha)} \dot{\alpha} \quad (5.28)$$

Ces équations résument la relation d'équivalence unidimensionnelle que l'on établit entre les deux modèles. Elle relie les paramètres cohésifs α , g_{CZM} et A_c aux paramètres d'endommagement ℓ , g_{CDM} et h et le profil d'endommagement propre au modèle TLS $d(\hat{\phi})$. Ces équations sont valables pendant tout le processus de dégradation, *i.e.* pour toutes les valeurs de α et ℓ . On peut donc déduire des paramètres TLS à partir de paramètres cohésifs et *vice versa* en fixant quatre parmi eux. Par exemple, si $d(\hat{\phi})$, $g_{\text{CDM}}(d)$, $g_{\text{CZM}}(\alpha)$ et $A_c(\alpha)$ sont donnés, on peut déduire la fonction d'adoucissement $h(d)$ qui permet d'avoir le même comportement dans le cas de la barre sous traction. Dans la suite, on cherche h uniquement à partir de la courbe traction-ouverture f et de l'ouverture w au lieu d'utiliser la description complète du modèle cohésive qui prend en compte g_{CZM} , A_c et α (cf. (5.6)).

En dérivant l'équation (5.26) par rapport au temps et en combinant (5.27) et (5.28) on obtient

$$-\frac{1}{2k} \frac{g'_{\text{CZM}}(\alpha)}{g_{\text{CZM}}^2(\alpha)} \dot{\alpha} = \frac{1}{E} \dot{\ell} \left(\frac{1}{g_{\text{CDM}}(d(\ell))} - 1 \right) \quad (5.29)$$

$$2Y_c \int_{\tilde{d}=0}^{d(\ell)} h(\tilde{d}) d\tilde{d} \dot{\ell} = -\frac{\sigma^2}{2k} \frac{g'_{\text{CZM}}(\alpha)}{g_{\text{CZM}}^2(\alpha)} \dot{\alpha} \quad (5.30)$$

Par ailleurs, comme $\sigma = kg_{\text{CZM}}w$, on a

$$\sigma = f(w) \quad (5.31)$$

$$w = \frac{2\sigma}{E} \int_0^\ell \left(\frac{1}{g_{\text{CDM}}(d(\phi))} - 1 \right) d\phi \quad (5.32)$$

$$\sigma = \sqrt{2EY_c \frac{g_{\text{CDM}}(d(\ell))}{1 - g_{\text{CDM}}(d(\ell))} \int_{\tilde{d}=0}^{d(\ell)} h(\tilde{d}) d\tilde{d}} \quad (5.33)$$

où les paramètres sont w et f pour le modèle cohésif et ℓ , g_{CDM} , h et $d(\hat{\phi})$ pour le modèle TLS et σ en tant que variable globale.

Faire tendre ℓ vers 0 implique $\sigma = \sqrt{\frac{2EY_c}{-g'_{\text{CDM}}(0)}}$, $w = 0$ et $\sigma = \sigma_f$. Donc

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2EY_c}{-g'_{\text{CDM}}(0)}} \quad (5.34)$$

On définit les grandeurs adimensionnelles suivantes

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_f}, \quad \hat{w} = \frac{w}{w_f}, \quad \hat{\ell} = \frac{\ell}{\ell_c}, \quad \lambda = \frac{2\sigma_f \ell_c}{E w_f} \quad (5.35)$$

et on pose

$$I(\hat{\ell}) = \int_0^{\hat{\ell}} \frac{1 - g_{\text{CDM}}(d(\hat{\phi}))}{g_{\text{CDM}}(d(\hat{\phi}))} d\hat{\phi}, \quad (5.36)$$

de telle sorte que le système (5.31), (5.32) et (5.33) s'écrit sous la forme adimensionnelle et condensée

$$\hat{\sigma} = F(\lambda I \hat{\sigma}) \quad \text{et} \quad \int_{\tilde{\phi}=0}^{\hat{\ell}} h(\tilde{d}) d\tilde{\phi} = -g'_{\text{CDM}}(0) \frac{1 - g_{\text{CDM}}(d(\hat{\ell}))}{g_{\text{CDM}}(d(\hat{\ell}))} \hat{\sigma}^2 \quad (5.37)$$

Ces équations sont valables pour toute position adimensionnée du front $\hat{\ell}$. Cette variable peut donc être remplacée par $\hat{\phi}$, qui parcourt le même domaine $[0; 1]$. Ce changement de variable dans l'écriture permet d'avoir une formulation plus générale qui s'affranchit de la notion de position de front et sort donc du cadre de la barre.

$$\hat{\sigma} = F(\lambda I \hat{\sigma}) \quad \text{et} \quad \int_0^{\hat{\phi}} h(\hat{\phi}) d\hat{\phi} = -g'_{\text{CDM}}(0) \frac{1 - g_{\text{CDM}}(d(\hat{\phi}))}{g_{\text{CDM}}(d(\hat{\phi}))} \hat{\sigma}^2 \quad (5.38)$$

On ne peut cependant pas oublier que ce système d'équations, établissant une relation entre les modèles cohésif et TLS n'est une relation d'équivalence que dans le cas de la barre. Son application à d'autres structures, et notamment des structures bi ou tridimensionnelles n'est qu'une

extrapolation des résultats obtenus.

Sens physique de λ

La définition de la quantité adimensionnelle λ comporte les paramètres principaux des deux modèles. En particulier elle comporte la longueur caractéristique ℓ_c . On peut trouver dans la littérature différentes longueurs caractéristiques visant la description de la zone d'élaboration des fissures dans les matériaux quasi-fragiles [42, 48, 74]. Dans le cas des modèles cohésifs, Smith estime dans [84] la longueur de la zone cohésive, que l'on note ℓ_{coh} , pour une fissure évoluant dans un corps infini et ce pour une large gamme de comportements cohésifs :

$$\ell_{\text{coh}} \approx \frac{3}{2} \frac{E w_f}{2 \sigma_f} \quad (5.39)$$

Le paramètre λ est proche du rapport entre la largeur de la zone d'endommagement en TLS — qui vaut $2\ell_c$ — et la longueur de la zone cohésive (cf. 5.4).

$$\lambda \approx \frac{3}{2} \frac{\ell_c}{\ell_{\text{coh}}} \quad (5.40)$$

La valeur de λ sera choisie dans la suite inférieure à $\frac{1}{2}$. En effet, comme il est prouvé en annexe, la condition d'unicité de la solution impose dans plusieurs cas que sa valeur soit inférieure à $\frac{1}{2}$. Ceci correspond au choix d'une zone d'endommagement allongée à l'avant de la fissure, dont l'épaisseur est faible par rapport à sa longueur. Écrire $\lambda \lesssim \frac{1}{2}$ revient à

$$\ell_c \lesssim \frac{1}{3} \ell_{\text{coh}} \quad (5.41)$$

5.2.4 Application à des cas particuliers

Ces relations générales sont à présent réécrites pour un choix particulier de $g_{\text{CDM}}(d)$. Ensuite, on supposera que le profil d'endommagement est le profil dit *parabolique* non symétrique, utilisé dans la partie 4 sous le nom POLY2. Finalement, on s'intéressera à deux courbes de comportements cohésifs classiques, un linéaire et un bi-linéaire. Pour l'ensemble de ces choix on déduira les fonctions d'adoucissement qui ne dépendront alors que des paramètres scalaires des courbes de comportement cohésif.

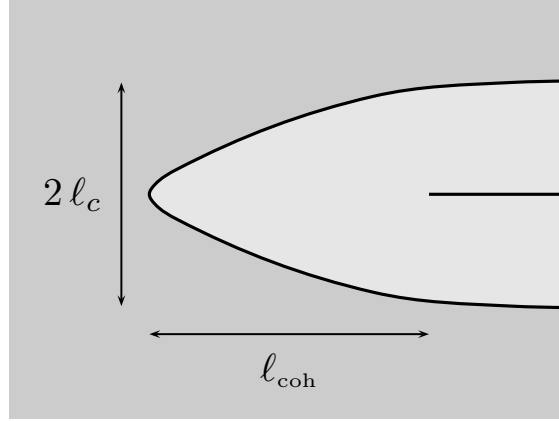


Figure 5.4 – Forme classique d’une zone endommagée et définition des longueurs ℓ_{coh} et ℓ_c .

5.2.4.1 Choix de la fonction d’endommagement g_{CDM}

On fait un choix classique

$$g_{CDM}(d) = 1 - d, \quad \text{et alors} \quad \Phi_{dam}(\varepsilon, d) = \frac{1}{2}(1 - d)E\varepsilon^2 \quad (5.42)$$

La condition d’admissibilité de la fonction d’adoucissement (5.16) s’écrit alors

$$h'(d) \geq 0 \quad (5.43)$$

et

$$I(\hat{\phi}) = \int_0^{\hat{\phi}} \frac{d}{1 - d} d\hat{\phi} \quad (5.44)$$

Le système d’équations (5.38) devient

$$\hat{\sigma} = F(\lambda I \hat{\sigma}) \quad \text{et} \quad \int_0^{\hat{\phi}} h(\hat{\phi}) d\hat{\phi} = \frac{d(\hat{\phi})}{1 - d(\hat{\phi})} \hat{\sigma}^2 \quad (5.45)$$

De plus,

$$\sigma_f = \sqrt{2EY_c} \quad (5.46)$$

5.2.4.2 Choix du profil d’endommagement TLS $d(\hat{\phi})$

On suppose un profil d’endommagement de forme parabolique, que l’on appelle POLY2 et dont la forme est donnée en figure 5.5. L’expression de l’endommagement en fonction de la fonction de niveau est donnée ci-dessous

$$d(\hat{\phi}) = 2\hat{\phi} - \hat{\phi}^2 \quad (5.47)$$

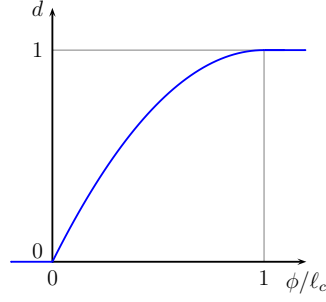


Figure 5.5 – Profil d’endommagement appelé POLY2

On a alors

$$I(\hat{\phi}) = \frac{\hat{\phi}^2}{1 - \hat{\phi}} \quad (5.48)$$

et le système (5.45) s’écrit

$$\hat{\sigma} = F\left(\lambda \frac{\hat{\phi}^2}{1 - \hat{\phi}} \hat{\sigma}\right) \quad \text{et} \quad \int_0^{\hat{\phi}} h(\hat{\phi}) d\hat{\phi} = \frac{2\hat{\phi} - \hat{\phi}^2}{(\hat{\phi} - 1)^2} \hat{\sigma}^2 \quad (5.49)$$

Ce choix est motivé par différentes observations et études. D’abord, des analyses d’émissions acoustiques [2] et des simulations de modèles mesoscopiques [34], dont les résultats sont très proches [41], montrent que le profil choisi est similaire à la distribution des micro-fissures autour de la macro-fissure. Par ailleurs, une comparaison entre un modèle d’endommagement non local et la mécanique linéaire élastique de la rupture montre aussi un profil d’endommagement similaire [54].

5.2.5 Deux exemples de courbes cohésives

Deux cas particuliers de courbes de comportement cohésif de traction-ouverture sont étudiés : le comportement linéaire et le bi-linéaire.

5.2.5.1 Comportement cohésif linéaire

On s’intéresse d’abord au comportement $F(\hat{w}) = 1 - \hat{w}$ (voir figure 5.6). La fonction d’adoucissement est obtenue par (5.49).

$$\hat{\sigma}(\hat{\phi}) = \frac{1 - \hat{\phi}}{1 - \hat{\phi} + \lambda \hat{\phi}^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\hat{\phi}} h(\hat{\phi}) d\hat{\phi} = \frac{2\hat{\phi} - \hat{\phi}^2}{(1 - \hat{\phi} + \lambda \hat{\phi}^2)^2} \quad (5.50)$$

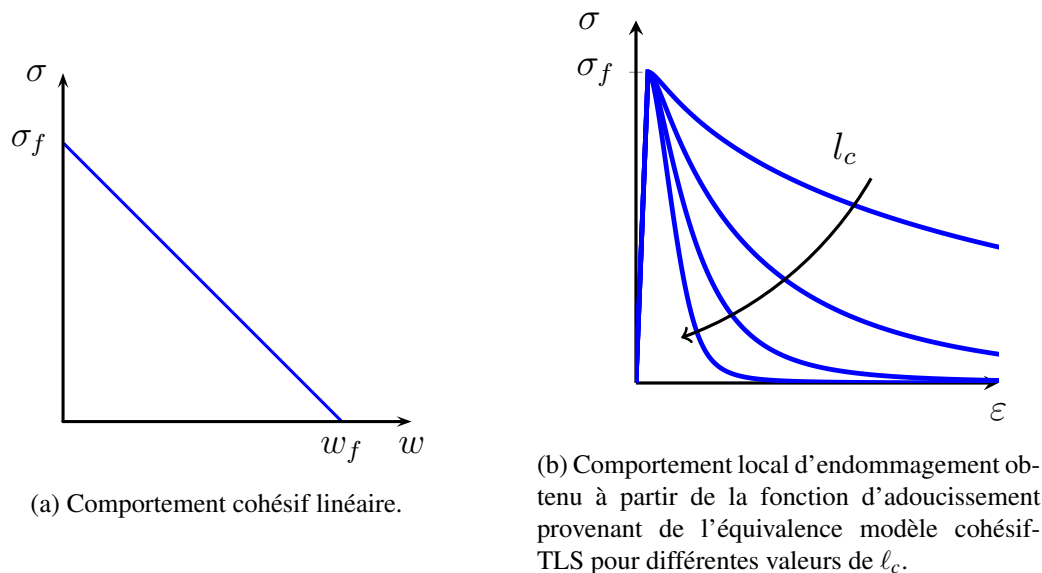


Figure 5.6 – Comportement cohésif linéaire et comportements locaux TLS associés.

5.2.5.2 Comportement cohésif bi-linéaire

Cette courbe est l'une des plus populaires pour décrire le comportement du béton [38, 39, 44, 67, 71, 81]. Elle est représentée en figure 5.7a. La méthode pour obtenir la fonction d'adoucissement est la même que précédemment. Le résultat est une fonction d'adoucissement discontinue croissante. La courbe contrainte-déformation locale est tracée en figure 5.7b. Elles présentent toutes un saut qui apparaît sous la forme d'une partie linéaire pendant laquelle l'endommagement reste constant. Ce plateau d'endommagement est provoqué par le changement de pente de la courbe de comportement cohésif. Les détails des calculs sont donnés en annexe. Quelques conditions concernant le choix des paramètres cohésifs et du modèle TLS sont analysés en annexe.

5.3 Application à un problème bidimensionnel

Dans cette partie, on applique les comportements locaux obtenus précédemment à un problème bidimensionnel. Ceux-ci ont été obtenus par une équivalence uni-dimensionnelle entre la réponse d'une barre sous le modèle TLS et cohésif. Son application à un problème bidimensionnel ne garantit pas les résultats. Ainsi, on compare ici le comportement cohésif attendu à celui résultant de simulations TLS bidimensionnelles dans lesquelles on a appliqué directement le comportement adoucissant obtenu à partir de l'équivalence uni-dimensionnelle. On s'intéresse aussi à l'influence du seul paramètre non fixé par l'équivalence précédente : la longueur caractéristique.

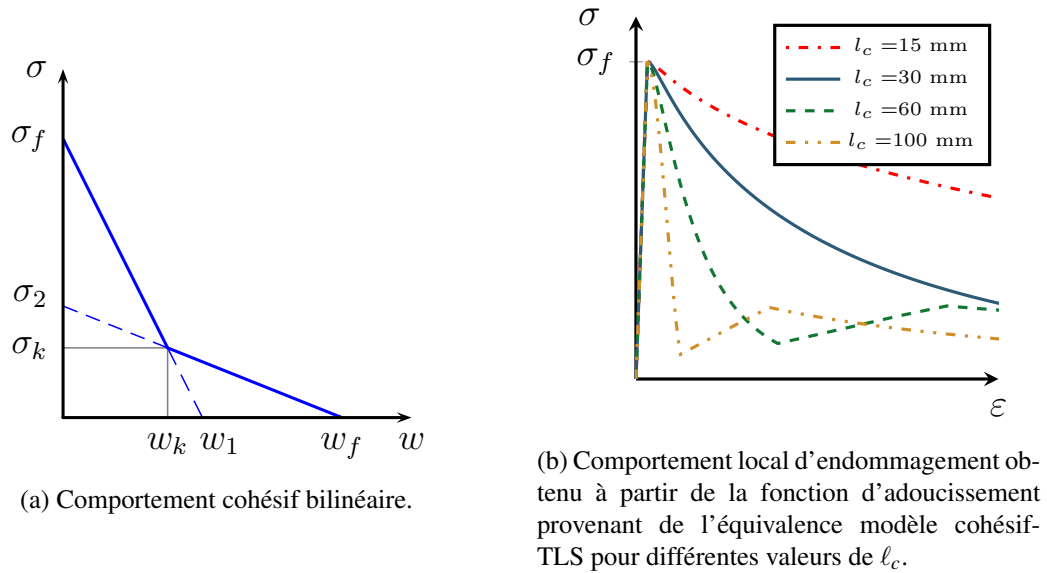


Figure 5.7 – Comportement cohésif bilinéaire et comportements locaux TLS associés.

téristique TLS ℓ_c . On rappelle dans la figure 5.8 la forme des zones endommagée et cohésive se propageant dans un milieu bidimensionnel.

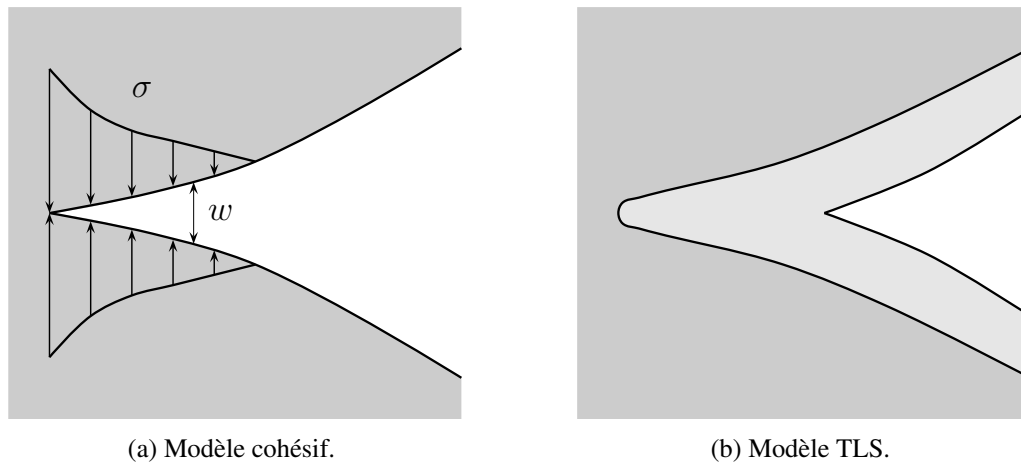


Figure 5.8 – Représentation d'une fissure ouverte avec une zone cohésive (à gauche) et avec une zone endommagée TLS (à droite). Le gris foncé (respectivement clair) correspond à la zone endommagée (resp. saine).

5.3.1 Modèle TLS appliqué aux problèmes bi-dimensionnels

L'implémentation du modèle TLS pour des problèmes bi-dimensionnels présente trois difficultés majeures :

- le besoin de représenter un saut de déplacement,
- le calcul du taux de restitution d'énergie non-local \bar{Y} et
- la propagation du front d'endommagement.

Celles-ci sont résolues respectivement par

- l'utilisation d'un enrichissement X-FEM classique [58] ou de *double découpe* [82],
- la résolution d'un problème variationnel comme décrit dans [18] et
- l'utilisation d'un algorithme explicite avec prédiction décrit en annexe.

En ce qui concerne l'initiation de l'endommagement dans la structure saine, il n'est pas possible d'introduire numériquement une zone endommagée de taille infinitésimale. On introduit donc une zone endommagée suffisamment petite — de la taille d'un élément — afin que la modification introduite dans le comportement de la structure soit négligeable. Par ailleurs, le potentiel donné en (5.12), symétrique en traction et en compression, est remplacé par un autre dissymétrique

$$\Phi_{\text{dam}}(\varepsilon, d) = \mu(1 - \alpha_i d)\varepsilon_i^2 + \frac{\lambda}{2}(1 - \alpha d)\text{tr}(\varepsilon)^2 \quad (5.51)$$

où λ et μ sont les coefficients d'élasticité de Lamé, ε_i les valeurs propres du tenseur des déformations et

$$\begin{cases} \alpha_i = 0 & \text{si } \varepsilon_i < 0 \\ \alpha_i = 1 & \text{si } \varepsilon_i \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha = 0 & \text{si } \text{tr}(\varepsilon) < 0 \\ \alpha = 1 & \text{si } \text{tr}(\varepsilon) \geq 0 \end{cases} \quad (5.52)$$

5.3.2 Résultats bi-dimensionnels et influence de ℓ_c

On simule des éprouvettes en flexion trois points (figure 5.9) ayant un module de Young de 37 GPa et un coefficient de Poisson de 0,21. Les propriétés cohésives choisies sont $w_f = 10^{-4}$ m, $w_1 = 4 \cdot 10^{-5}$ m, $\sigma_f = 3,5$ GPa et $\sigma_k = 1,0$ GPa. Toutes les simulations sont réalisées avec le même ratio $\frac{l_{\text{mesh}}}{\ell_c} = \frac{1}{20}$ où l_{mesh} est la taille caractéristique du maillage au centre de la poutre, où la zone d'endommagement évolue. Le comportement TLS équivalent aux paramètres cohésifs choisis est tracé en figure 5.7b pour quatre valeurs de ℓ_c : 15 mm, 30 mm, 60 mm et 100 mm. Un exemple des résultats obtenus est tracé en figure 5.10.

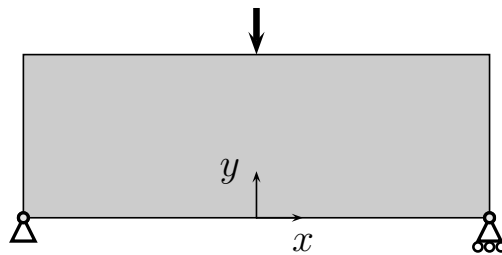


Figure 5.9 – Essai de flexion trois points (TPB)

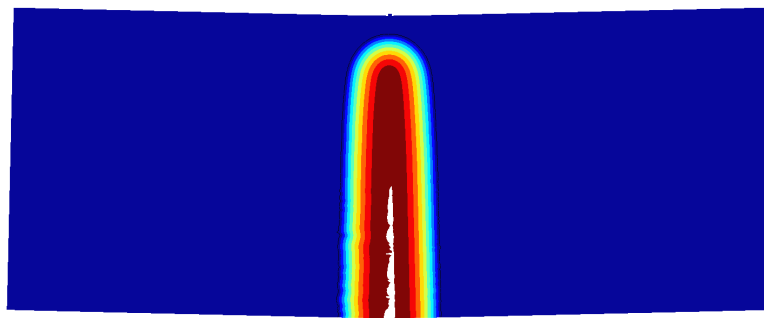


Figure 5.10 – Répartition de l'endommagement dans le domaine à un instant donné. Le bleu correspond au matériau sain, le rouge à un endommagement proche de 1 et la zone blanche à la fissure (endommagement égal à 1).

5.3.2.0.1 Comportement global On s'intéresse d'abord à la réponse globale force-ouverture tracée en figure 5.11. L'ouverture de fissure — ou *crack mouth opening displacement (CMOD)* — est définie comme le déplacement relatif de deux points symétriques situés sur la face inférieure de l'éprouvette et séparés d'une distance égale à la profondeur de la poutre. Le comportement global observé pour les quatre valeurs de ℓ_c est très proche. La différence principale apparaît sur la valeur du chargement maximal admissible. Cependant, la différence reste faible. L'écart maximal à la valeur moyenne de 24,6 kN est de moins de 3 %.

5.3.2.0.2 Forme de la zone endommagée à la charge maximale Il est intéressant d'observer la forme et la taille de la zone endommagée lorsque la charge maximale est atteinte. Pour différentes valeurs de ℓ_c , on trace la position du front d'endommagement dans la figure 5.12. Cette zone est d'autant plus large que ℓ_c est grand. Ceci est cohérent avec le fait que sous le modèle TLS, la largeur de la zone d'élaboration est pilotée directement par ℓ_c . Par exemple, la largeur d'une zone endommagée de type quasi-fissure est de $2\ell_c$. En ce qui concerne la profondeur de la zone endommagée, elle est sensiblement la même pour tous les ℓ_c . En effet, elle dépend directement du comportement cohésif équivalent. On peut conclure en ce qui concerne la zone d'élaboration que sa profondeur est probablement la même que dans les simulations cohésives et

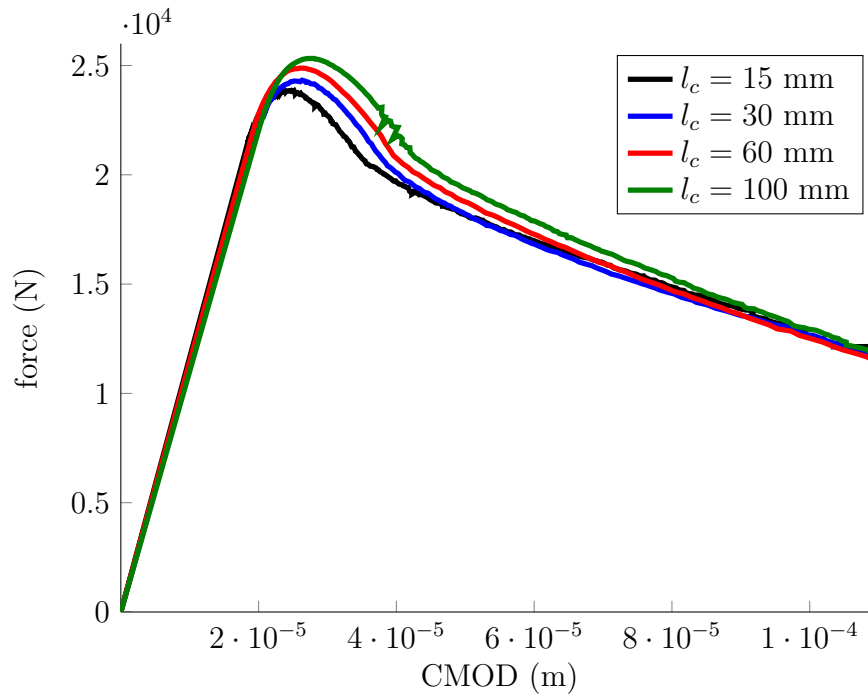


Figure 5.11 – Comportement global de simulations TLS d’un essai de flexion trois points pour différents ℓ_c . Sont tracés les résultats bruts de la simulation.

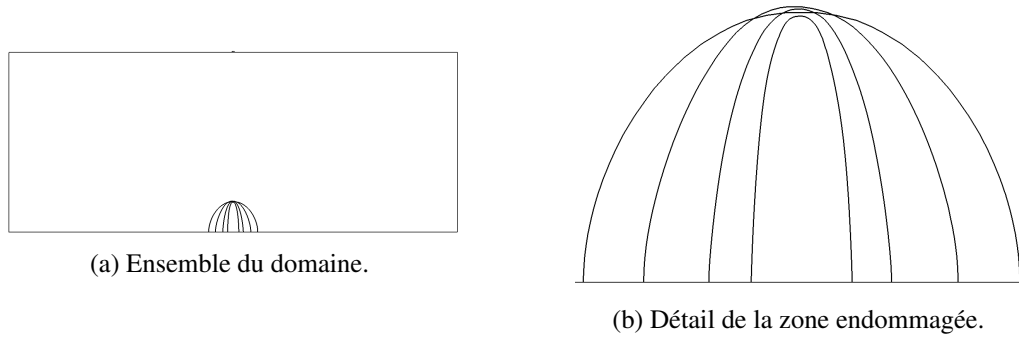


Figure 5.12 – Position du front d’endommagement au chargement maximal pour différentes valeurs de ℓ_c .

que sa largeur, négligée sous le modèle cohésif, est pilotée par ℓ_c .

5.3.2.0.3 Accord des comportements locaux TLS et cohésif Le comportement cohésif local ayant servi à établir la fonction d’adoucissement TLS est comparé aux résultats de la simulation TLS. Comme la zone cohésive est concentrée en une ligne et n’a donc pas d’épaisseur,

il est nécessaire de déterminer quelles grandeurs TLS, notées σ^{TLS} et w^{TLS} , sont comparables aux grandeurs cohésives, soit σ_{xx} et w . Sur toute la bande d'endommagement, on définit une contrainte et une ouverture pour chaque position y . On note y_{max} la valeur maximale de y pour laquelle $d > 0$. Pour $y < y_{\text{max}}$, environ 15 positions sont analysées pour les quatre valeurs de ℓ_c .

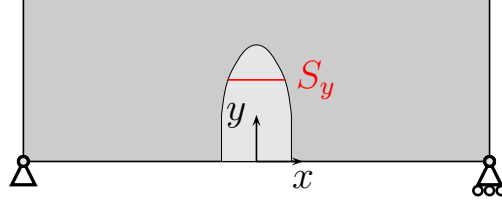


Figure 5.13 – Définition de S_y .

On choisit de prendre la valeur de la contrainte σ_{xx} sur le front d'endommagement pour une valeur donnée de y . En notant $l(y)$ l'épaisseur de la bande d'endommagement à une hauteur y donnée, et S_y les points de la bande d'endommagement pour lesquels $d(x, y) > 0$ et y est fixe (cf. figure 5.13),

$$\sigma^{\text{TLS}}(y) = \sigma_{xx}(x = \frac{l(y)}{2}, y) \quad (5.53)$$

En ce qui concerne l'ouverture, il est nécessaire de considérer en TLS l'épaisseur complète de la zone d'endommagement. Ainsi, il est choisi de comparer le déplacement, perpendiculairement aux lèvres de la fissure, sur les bords de S_y . Ainsi, un terme supplémentaire est ajouté à l'ouverture cohésive afin d'avoir des quantités comparables.

$$w^{\text{CZM}}(y) + \int_{S_y} \epsilon_{xx}^{\text{CZM}}(x, y) dx \quad \text{est comparable à} \quad \int_{S_y} \epsilon_{xx}^{\text{TLS}}(x, y) dx \quad (5.54)$$

où $\int_{S_y} \epsilon_{xx}^{\text{CZM}}(x, y) dx$ est le déplacement provoqué par la déformation du matériau sain autour de la zone cohésive. On peut écrire

$$\epsilon_{xx}^{\text{CZM}} = (1 - d) \epsilon_{xx}^{\text{TLS}} \quad (5.55)$$

d'où

$$w^{\text{TLS}}(y) = \int_{S_y} \epsilon_{xx}(x, y) dx - \int_{S_y} (1 - d) \epsilon_{xx}(x, y) dx = \int_{S_y} d(x, y) \epsilon_{xx}(x, y) dx \quad (5.56)$$

Les courbes contrainte-déformation obtenues pour différentes longueurs caractéristiques du modèle TLS ℓ_c sont tracées en figure 5.14. On observe que le nuage de point est proche du comportement cohésif souhaité pour les faibles valeurs de ℓ_c . Le comportement du modèle TLS autour de la zone d'endommagement tend vers celui du modèle cohésif lorsque ℓ_c tend vers zéro. Cependant, lorsque ℓ_c est très petit, il est difficile de simuler correctement l'évolution de l'en-

dommagement avec le modèle TLS. En effet, le gradient de l'endommagement et du déplacement deviennent très élevés, ce qui est difficile à capter numériquement.

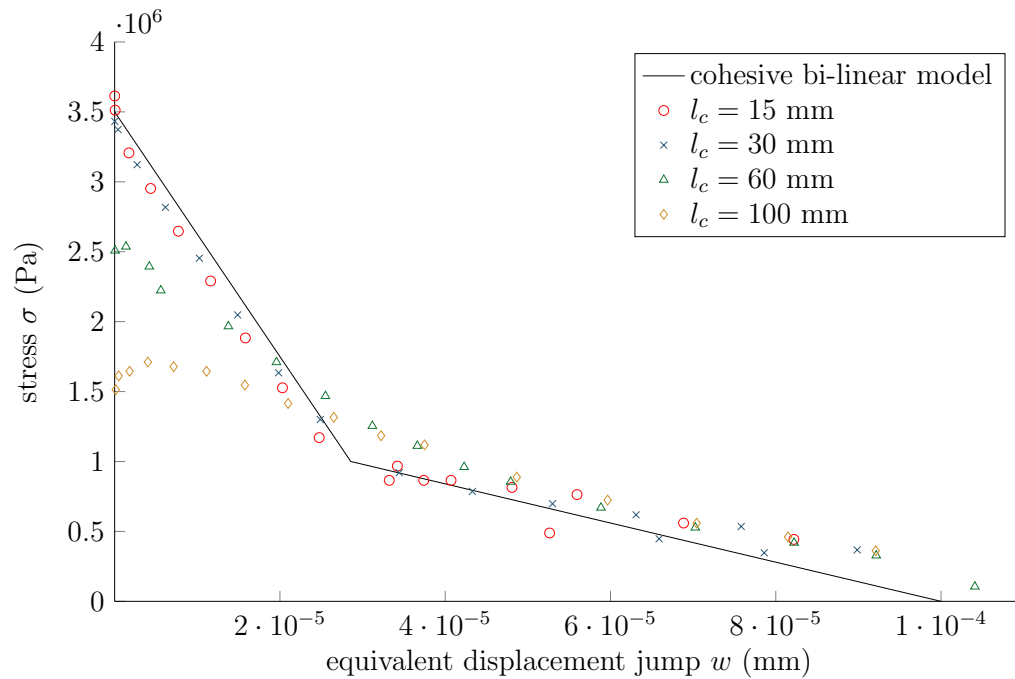


Figure 5.14 – Distribution des contraintes dans la zone d'élaboration pour le modèle TLS avec différentes valeurs de ℓ_c . L'abscisse est un déplacement équivalent à l'ouverture cohésive. La courbe noire correspond au comportement cohésif bilinéaire.

5.4 Conclusion

On a établi une équivalence unidimensionnelle entre le modèle cohésif et le modèle TLS. En effet, on a montré qu'il est possible d'avoir, à partir d'un comportement cohésif donné et d'un choix de modélisation de l'endommagement, une fonction d'adoucissement permettant d'obtenir un comportement unidimensionnel équivalent entre les deux modèles. Cette équivalence s'est aussi avérée utile pour des simulations bi-dimensionnelles. Ainsi, pour un comportement cohésif fixé, il est possible de choisir un profil d'endommagement et une largeur caractéristique de la zone d'élaboration et d'en déduire une fonction d'adoucissement conduisant à des résultats semblables avec les deux modèles. L'intérêt de ce travail est de transférer les bonnes propriétés de représentation des résultats expérimentaux du modèle cohésif au modèle TLS.

CHAPITRE 6

CONFRONTATION DES SIMULATIONS TLS À DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Dans cette partie, on s'intéresse à la capacité du modèle TLS à reproduire des résultats expérimentaux. On se contente ici de cas bi-dimensionnels et plus particulièrement d'éprouvettes parallélépipédiques d'épaisseur faible. Elles seront soit non entaillées, soit entaillées uniquement sur un bord. D'abord, on s'intéresse à un chargement en mode mixte par l'application d'un chargement de flexion excentré, conduisant à un trajet de fissuration non-rectiligne. Ensuite, on s'intéressera à la représentation de l'effet d'échelle et de bord en simulant avec le modèle TLS deux campagnes expérimentales récentes représentatives de ces effets. Pour ce faire, on utilisera les fonctions d'adoucissements obtenues dans le chapitre 5 à partir de l'équivalence unidimensionnelle des modèles TLS et cohésif.

6.1 Trajet de fissuration sous un chargement mixte

On s'intéresse à une éprouvette entaillée sur un seul bord — *single edge notched* ou SEN — sur deux appuis rotulés et soumise à un chargement de flexion excentré comme décrit dans [40]. Cette éprouvette est simulée avec le modèle cohésif dans [24]. Le trajet de fissuration étant *a priori* inconnu, le critère de contrainte tangentielle maximale — *maximum tangential stress* ou MTS — est utilisé dans un premier temps couplé à une résolution du problème d'élasticité pour déterminer le trajet de fissuration. Ensuite le modèle cohésif est utilisé pour obtenir la courbe force-ouverture globale. En ce qui concerne le modèle TLS, la détermination du trajet de fissuration n'est pas dissociée du calcul du facteur de chargement. L'évolution du front d'endommagement est tracé en figure 6.1.

On peut constater que le gradient de l'endommagement n'est pas parallèle au bord du domaine, contrairement aux modèles de champs de phase [23].

Une première simulation TLS est réalisée avec un endommagement initial en bout d'entaille d'un dixième de ℓ_c (cf. figure 6.2). On y observe que le trajet de fissuration cohésif et les lèvres de la fissure TLS sont proches bien que quelques différences existent. En ce qui concerne la courbe force-ouverture, il y a une surestimation de la charge maximale et de la fin de la courbe post-pic. L'enveloppe expérimentale donnée dans [24] est également tracée.

Le modèle cohésif utilisé dans [24] force la fissure à démarrer dans la continuité de l'entaille. Dans le modèle TLS, aucune hypothèse particulière n'est faite sur le trajet de fissuration. Ceci pourrait expliquer la différence entre les résultats présentés en figure 6.2. Afin de confirmer l'influence de cette différence de modélisation, une autre simulation TLS a été menée en prenant un endommagement initial plus important. On choisit alors d'initier une zone endommagée de rayon

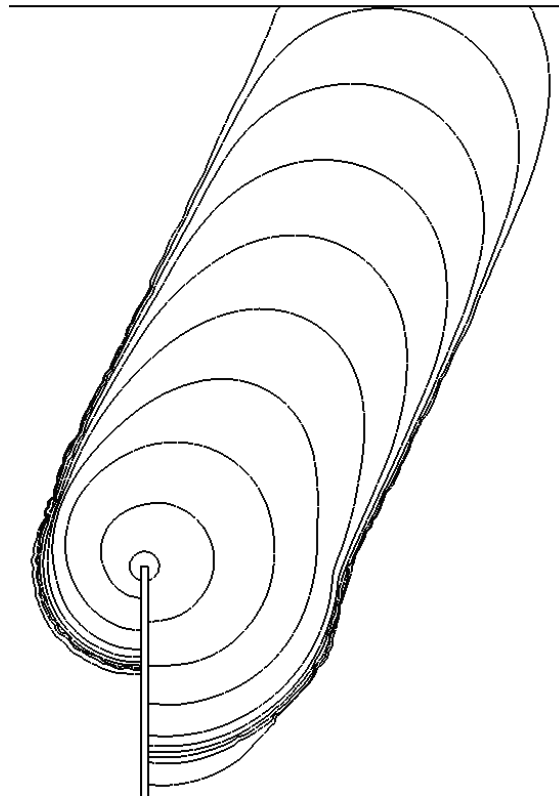
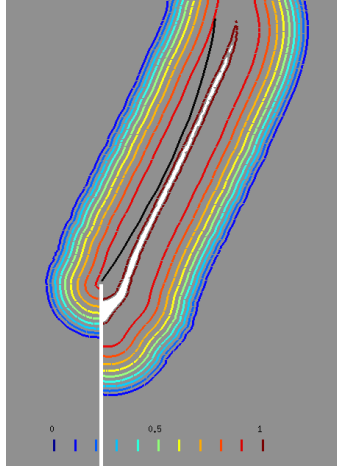


Figure 6.1 – Évolution de l'endommagement dans une simulation du modèle TLS.

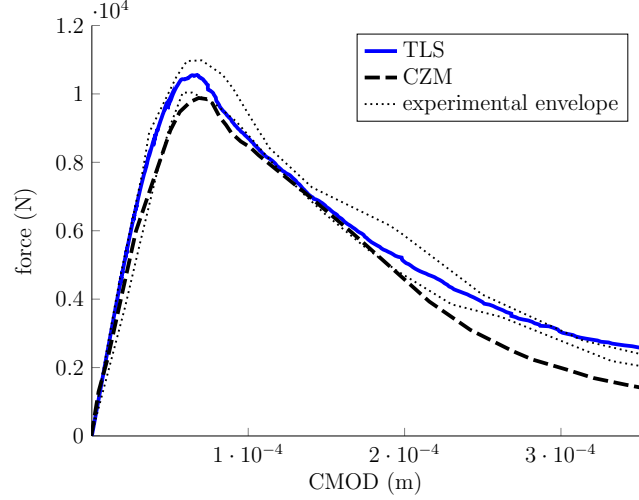
$0.75\ell_c$. Les trajets de fissuration TLS et cohésif sont alors superposés. De plus, les courbes force-ouverture sont coïncidentes jusqu'à environ la première moitié de la courbe post-pic. Au-delà de ce point, la courbe représentant la simulation TLS reste dans l'enveloppe expérimentale alors que la courbe cohésive en sort. On peut conclure que le modèle TLS est bien capable de représenter des trajets de fissuration non-rectilignes et de fournir une courbe force-ouverture représentative des essais sur structures.

6.2 Effets d'échelle et de bord

On s'intéresse ici à la capacité du modèle TLS à simuler les effets d'échelle et de bord. Pour ce faire, on commence par proposer une méthode de calibration du modèle TLS avec une fonction d'adoucissement provenant de l'équivalence établie avec le modèle cohésif dans la partie 5. Cette méthode est ensuite appliquée à deux campagnes expérimentales.



(a) Détail du ligament de l'éprouvette. Sont tracés les iso-valeurs d'endommagement. La zone totalement endommagée est en blanc. à titre de comparaison, le trajet de fissuration utilisé pour la simulation du modèle cohésif [24] est également fourni.



(b) Courbe force-ouverture. En trait plein, le modèle TLS (données brutes), en trait interrompu le modèle cohésif et en pointillé l'enveloppe des résultats expérimentaux.

Figure 6.2 – Comparaison entre les résultats des modèles TLS et cohésif. Le rayon de la zone d'endommagement initiale est de $0.10 \ell_c$.

6.2.1 Calibration des paramètres

Rappelons d'abord les paramètres du modèle, que l'on sépare en deux catégories : ceux provenant du comportement cohésif équivalent et ceux propres au modèle TLS. On se contente du comportement cohésif bi-linéaire. Ainsi, la première famille de paramètres se réduit à quatre paramètres scalaires.

6.2.1.1 Paramètres du modèle cohésif

Les paramètres choisis pour décrire le comportement cohésif bi-linéaire sont σ_f , σ_k , w_1 et w_f (cf. figure 6.4). De ces quatre paramètres, on déduit deux valeurs de taux de restitution d'énergie lié à l'avancée d'une fissure [16]. Le premier, noté G_f , provient de l'analyse de l'effet d'échelle [9] ; le deuxième, G_F , correspond à la quantité totale d'énergie nécessaire à casser la poutre [80].

$$G_f = \frac{1}{2} \sigma_f w_1, \quad G_F = G_f + \frac{1}{2} \sigma_k (w_f - w_1) \quad (6.1)$$

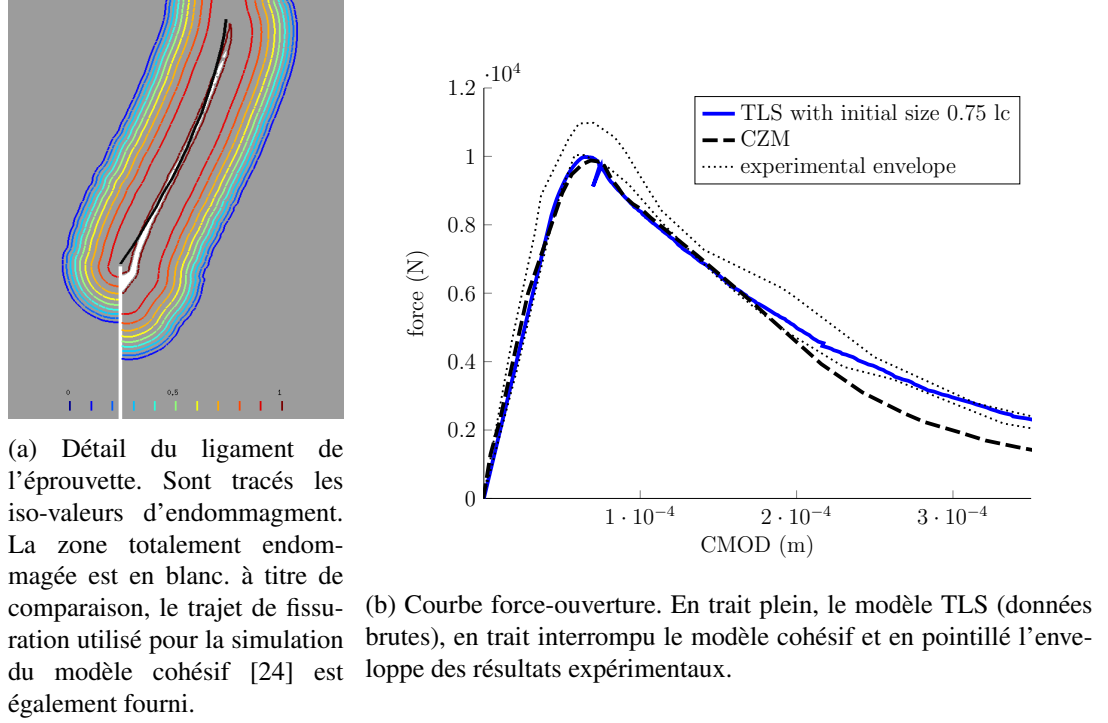


Figure 6.3 – Comparaison entre les résultats des modèles TLS et cohésif. Le rayon de la zone d'endommagement initiale est de $0.75 \ell_c$.

Par ailleurs, σ_f est relié à l'effort maximal d'un essai de fendage f_t . Pour la calibration du modèle, on considère ces trois valeurs mesurables pour définir des paramètres initiaux. Il reste un degré de liberté qui est fixé de façon arbitraire. Ainsi, on se donne $\sigma_k = \frac{\sigma_f}{2}$ ce qui conduit à

$$\sigma_f = f_t, \quad w_1 = \frac{2G_f}{\sigma_f}, \quad \sigma_k = \frac{\sigma_f}{2} \quad \text{et} \quad w_f = \frac{2(G_F - G_f)}{\sigma_k} + w_1 \quad (6.2)$$

Ces valeurs sont seulement proposées comme un point de départ permettant d'avoir une bonne qualité initiale. Cependant, il est conseillé de les optimiser en comparant avec les résultats expérimentaux. Tout d'abord, σ_f doit être modifié afin d'obtenir la valeur souhaitée pour la charge maximale admissible de la plus grande éprouvette non entaillée. Ensuite, w_1 est choisi afin d'identifier la charge maximale de la plus grande éprouvette avec l'entaille la plus profonde. On peut aussi utiliser la forme de la courbe force-ouverture autour de la charge maximale. Finalement, σ_k et w_f peuvent être légèrement modifiés afin de mieux représenter le comportement post-pic. Cependant, les meilleurs résultats d'identification obtenus correspondent à des valeurs de G_f et de G_F très proches des prédictions. Il est important de préciser que quelques conditions doivent être respectées dans le choix des paramètres cohésifs [68]. Ils correspondent à un taux de restitution d'énergie local Y croissant par rapport à la variable d'endommagement d .

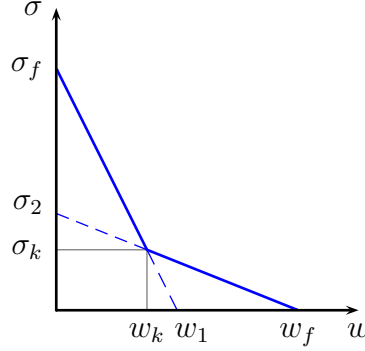


Figure 6.4 – Comportement cohésif bi-linéaire et notations.

6.2.1.2 Paramètres TLS

Deux paramètres proviennent de la distribution de l'endommagement liée au modèle TLS : la longueur caractéristique ℓ_c et le profil d'endommagement $d(\hat{\phi})$. Ces paramètres sont choisis de telle sorte qu'ils soient proches des caractéristiques physiques de la zone d'élaboration. Dans [34], sont réalisées des simulations mesoscopiques d'éprouvettes en flexion trois points sous un chargement centré. Il a été prouvé que les résultats numériques et expérimentaux sont similaires en ce qui concerne la largeur de la bande d'endommagement [37]. Sa taille est entre 10 mm — d'après une analyse énergétique — et 40 mm — pour une analyse directe de l'endommagement —. Afin de fixer une valeur entre ces bornes, des considérations numériques sont prises en compte : on évite les valeurs trop faibles de ℓ_c pour les difficultés numériques qu'elles impliquent mais on choisit cependant une valeur assez faible pour que l'accord entre les modèles cohésifs et TLS soit maximal [68]. La valeur de ℓ_c est donc fixée à 20 mm.

Le profil d'endommagement est principalement identifié à partir de la distribution de l'endommagement obtenue par les simulations mesoscopiques de [34]. Afin de pouvoir obtenir une grandeur représentative d'un endommagement continu à partir des valeurs localisées d'endommagement des interfaces propres du modèles mesoscopique, un calcul de moyenne est mis en place. Notons x la coordonnée horizontale centrée au milieu de l'éprouvette et y la coordonnée verticale avec l'origine sur le bord inférieur de l'éprouvette comme dans [37]. Les coordonnées de l'entaille sont $(x = 0, 0 < y < y_{\max}^{\text{notch}})$. Le profil de l'endommagement est analysé sur une bande $y \in [10\text{mm}, 16\text{mm}]$ de l'éprouvette ($n = 2, i = 1$), c'est-à-dire légèrement à l'avant de la pointe de l'entaille. Sur la bande, des valeurs moyennes de l'endommagement des interfaces sont calculées avec un poids uniforme sur des zones de largeur 10 mm. Les résultats obtenus sont tracés dans la figure 6.5. Le profil d'endommagement choisi, une parabole inversée est également tracée. Les deux sont proches là où l'endommagement est concentré mais les deux diffèrent loin de la quasi-fissure. En effet, il existe une zone où l'endommagement est diffus qui est difficile à repré-

senter sous les hypothèses du modèle TLS données ici. De nouveaux travaux prennent en compte l'existence simultanée d'une zone d'endommagement diffus et d'une autre d'endommagement localisé [61]. Ici, on se contente de modéliser la zone d'endommagement localisé et on néglige l'endommagement diffus.

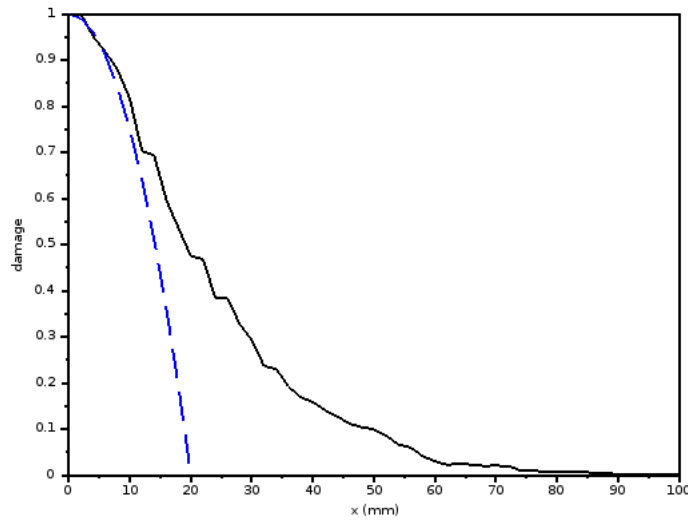


Figure 6.5 – Endommagement moyen des interfaces obtenu à partir d'une simulation d'un modèle mésoscopique *lattice* (en trait plein noir) et le profil d'endommagement identifié (en trait interrompu bleu).

6.3 Identification des résultats expérimentaux

On simule dans cette partie les éprouvettes de deux campagnes expérimentales menées récemment [36, 46]. L'intérêt de celles-ci est qu'elles font intervenir aussi bien l'effet d'échelle que de bord, avec des tailles d'éprouvettes et des profondeurs d'entaille diverses, et ce pour les mêmes matériaux et dans les mêmes conditions. Par ailleurs, l'identification de ces campagnes a déjà été réalisée pour plusieurs modèles : celui de zone cohésive pour [46], menée dans [44], et les modèles d'endommagement non-local intégral [36] et mésoscopique *lattice* [34] pour les essais de [36]. Ces identifications ont montré la capacité des modèles de zone cohésive et *lattice* à reproduire correctement les effets d'échelle et de bord. Elles manifestent cependant la difficulté du modèle non-local intégral à rendre compte de ces phénomènes, comme le confirme [1]. Ainsi, de trois familles de modèles différentes, seulement deux ont été capables de reproduire les effets d'échelle et de bord.

Les éprouvettes sont entaillées sur un seul bord ou non-entaillées. Lorsqu'elles sont en-

taillées, elle le sont de façon centrée. Elles sont soumises à un effort centré de flexion trois points. Les éprouvettes de chaque campagne et pour chaque profondeur relative d'entaille, sont homothétiques suivant deux dimensions ; l'épaisseur est gardée constante. Les deux campagnes utilisent des bétons ayant une taille maximale de granulats proche : 10 mm pour [46] et 14 mm pour [36]. Il est cependant important de préciser que la façon de réaliser l'entaille est différente dans les deux cas : dans [46], elle est sciée avec une scie de largeur 1,5 mm alors que dans [36] elle est moulée avec une plaque de 2 mm d'épaisseur.

Toutes les simulations TLS sont réalisées avec des paramètres numériques similaires : la densité du maillage est uniforme sur la zone d'évolution de l'endommagement et vaut environ $\frac{\ell_c}{20}$. L'avancée maximale du front à chaque pas de temps est d'entre 0,25 et 0,7 fois la taille caractéristique du maillage. La valeur est proche de 0,7 pour les grandes éprouvettes et de 0,25 pour les petites.

6.3.1 Comparaison avec la campagne de Grégoire *et al.*

Quatre tailles d'éprouvettes sont considérées (400 mm, 200 mm, 100 mm et 50 mm de profondeur) et trois profondeurs relatives d'entaille (0, 0,2 et 0,5) comme décrit dans la figure 6.6. Le rapport entre la distance entre les appuis et la profondeur est de 2,5. Les géométries sont décrites par deux entiers, n pour la taille — 1 étant le plus grand et 4 le plus petit — et i pour la profondeur de l'entaille — 1 pour les éprouvettes entaillées jusqu'à la moitié de la profondeur, 2 pour un cinquième et 3 pour les non entaillées —. Les paramètres donnés dans le tableau 6.I correspondent à la meilleure identification obtenue, montrée dans les figures 6.7. Les résultats expérimentaux tracés proviennent uniquement de [36] bien que certains essais aient été reproduits dans [37].

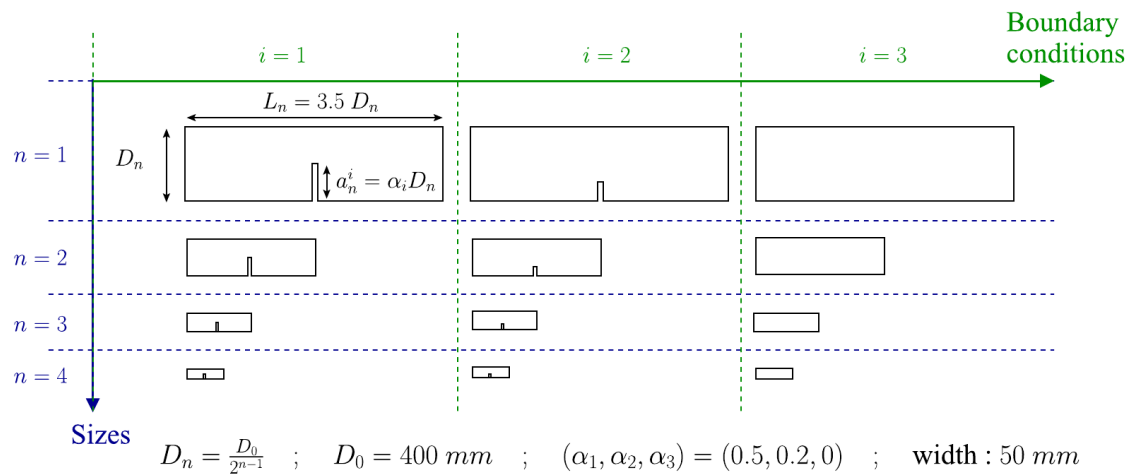


Figure 6.6 – Description de la géométrie des poutres (source : [36])

σ_f	3.8 MPa
σ_k	1.8 MPa
w_l	23 μm
w_f	55 μm

Tableau 6.I – Valeurs du comportement cohésif de la meilleure identification obtenue pour les essais de [36].

Les résultats montrent un bon accord entre les essais et les simulations. L'allure de la courbe force-ouverture est bien reproduite bien qu'il existe quelques différences, en particulier pour les cas $(n = 1, i = 2)$ et $(n = 1, i = 3)$. Cependant, on peut remarquer que le modèle *lattice* n'a pas reproduit correctement le cas $(n = 1, i = 2)$ et il n'y a pas de résultats post-pic pour l'éprouvette $(n = 1, i = 3)$ dans [34].

Remarquons que l'on peut observer un saut dans les courbes simulées en TLS $(n = 1, i = 2)$ et $(n = 1, i = 3)$. Leur existence est liée à la valeur d'un coefficient purement numérique fixant l'avancée maximale du front à chaque pas de temps. Bien qu'il soit important de réaliser des efforts d'implémentation du modèle pour éviter de tels phénomènes, le sens physique des résultats ne devraient pas être mis en doute.

6.3.2 Comparaison avec la campagne de Hoover *et al.*

Quatre tailles d'éprouvettes sont étudiées (500 mm, 215 mm, 93 mm et 40 mm de profondeur) et cinq profondeurs d'entaille relatives (0, 0,025, 0,075, 0,15 et 0,3). Pour la profondeur relative de 0,025, seulement les deux grandes tailles d'éprouvettes ont été réalisées expérimentalement et simulées. Le rapport entre la distance entre appuis et la profondeur est de 2,176. Les géométries sont décrites par deux lettres : une majuscule pour la taille (A étant la plus grande et D la plus petite) et une minuscule pour la profondeur d'entaille (a pour les plus profondes et e pour les non entaillées). Les paramètres correspondant à la meilleure identification obtenue sont donnés dans le tableau 6.II et les courbes sont tracées dans les figures 6.8 et 6.9.

On observe une très bonne correspondance entre les résultats expérimentaux et les simula-

	TLS simulations	cohesive simulations [44]
σ_f	4.2 MPa	3.92 MPa
σ_k	1.5 MPa	0.588 MPa
w_l	23.5 μm	25.3 μm
w_f	40 μm	94.8 μm

Tableau 6.II – Valeurs du comportement cohésif de la meilleure identification obtenue pour les essais de [44]. Les valeurs utilisées dans [44] sont également fournies.

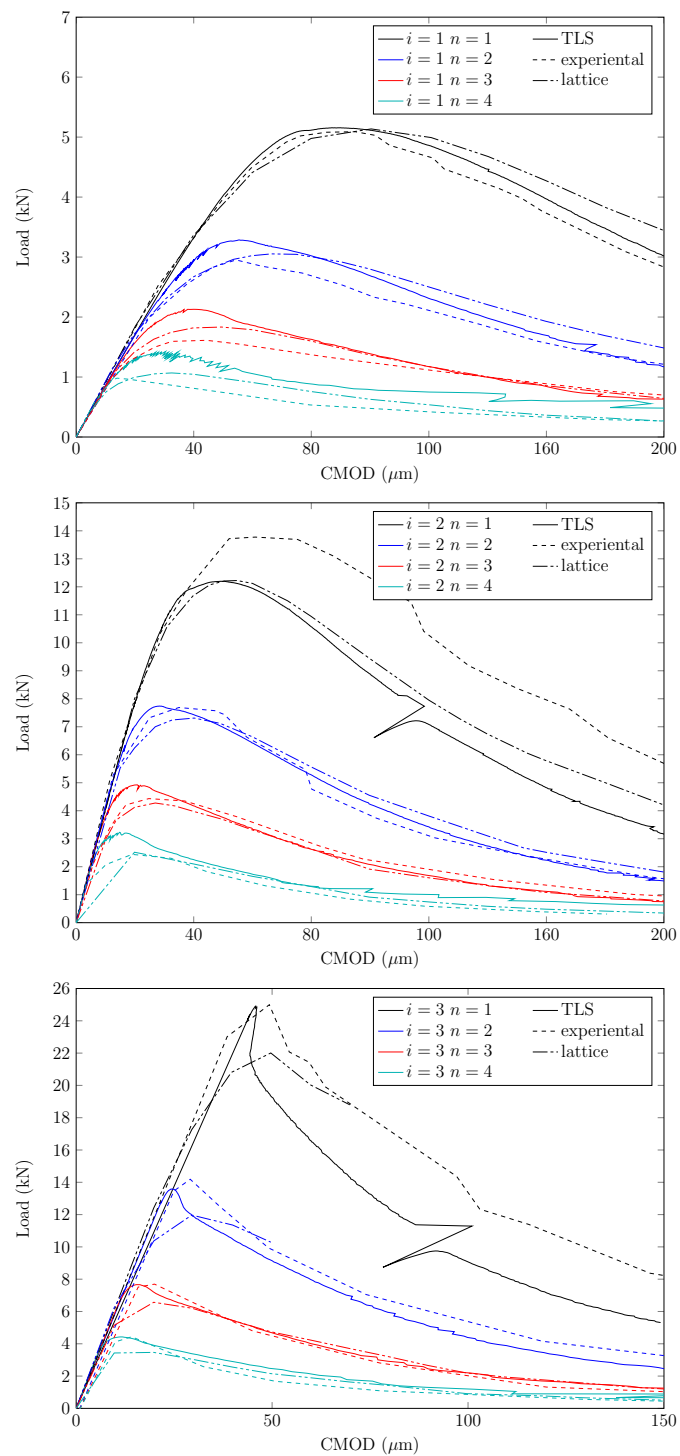


Figure 6.7 – Comparaison entre les résultats des simulations TLS, *lattice* [34] et les résultats expérimentaux [36]. Les données brutes sont tracées pour les simulations TLS.

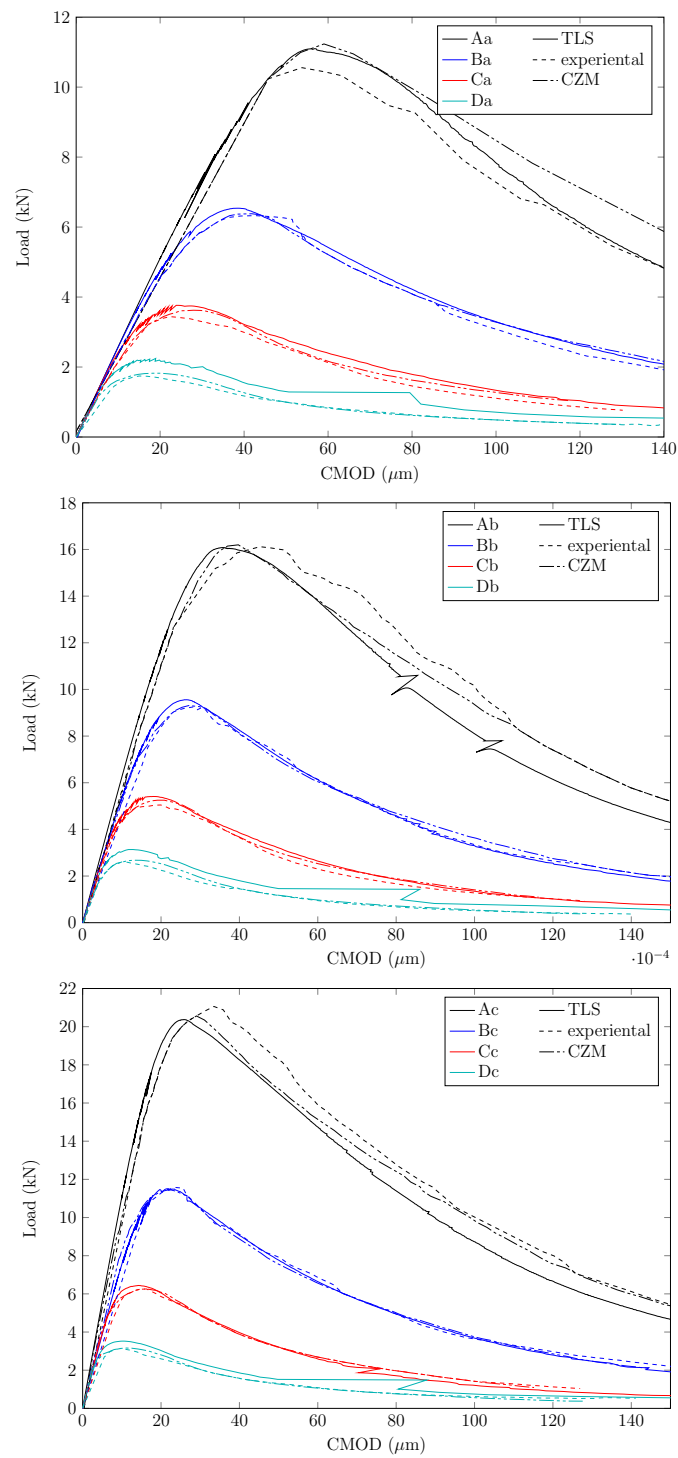


Figure 6.8 – Comparaison entre les résultats des simulations TLS, du modèle cohésif [44] et les résultats expérimentaux [46]. Les données brutes sont tracées pour les simulations TLS.

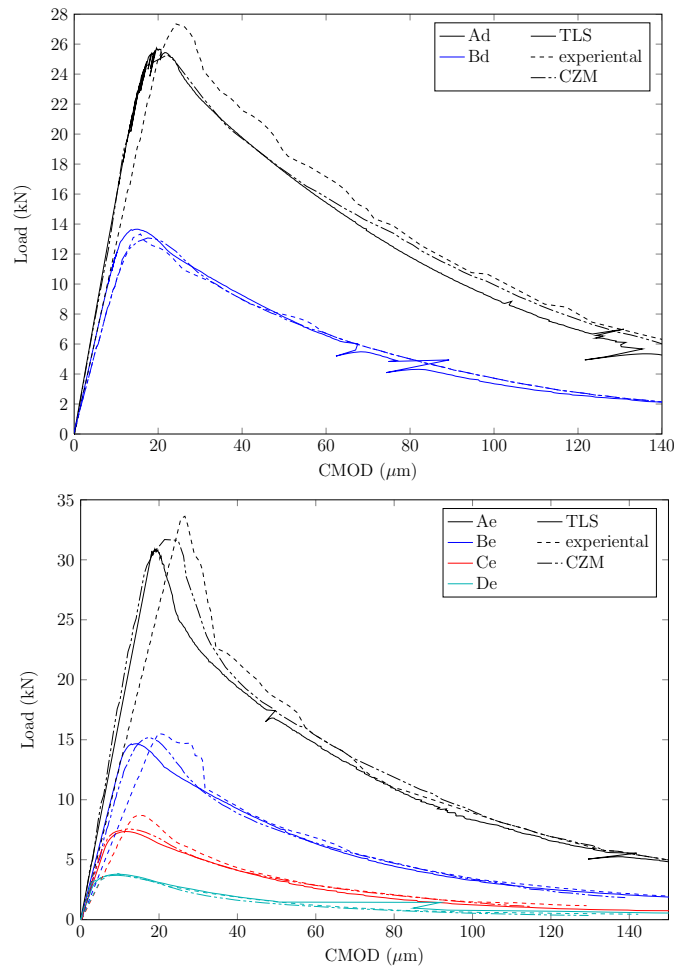


Figure 6.9 – Comparaison entre les résultats des simulations TLS, du modèle cohésif [44] et les résultats expérimentaux [46]. Les données brutes sont tracées pour les simulations TLS.

tions TLS : la valeur des charges maximales admissibles dans les deux cas sont très proches, ainsi que l'allure des courbes force-ouverture. La qualité de l'identification TLS est similaire à celle du modèle cohésif bien que les paramètres obtenus ne soient pas rigoureusement les mêmes. La valeur de ℓ_c n'étant pas strictement nulle, il a été prouvé dans [68] qu'il existe des différences dans le comportement local autour de la zone d'endommagement qui se répercutent dans le comportement global pour les problèmes bidimensionnels.

La qualité de cette identification est légèrement meilleure que la précédente (cf. 6.3.1). Ceci pourrait s'expliquer par la différence de méthode utilisée pour réaliser l'entaille. En effet, une entaille moulée impose une distribution différente de granulats autour de la pointe de l'entaille. Par ailleurs, l'action du retrait endogène pendant la prise du béton sera différente en présence ou en l'absence de l'entaille.

6.4 Conclusions

Il a été prouvé que le modèle TLS, avec un choix adapté de fonction d'adoucissement, est capable de rendre compte des effets d'échelle et de bord et que la précision des résultats est proche de celle des modèles cohésif et *lattice*. Aucun autre modèle d'endommagement continu n'a été capable de fournir de tels résultats jusqu'à présent à la connaissance de l'auteur. On peut donc affirmer que l'équivalence unidimensionnelle entre les modèles cohésif et TLS établie dans la partie 5 et dans [68] a fourni un comportement d'adoucissement pertinent pour l'identification d'essais expérimentaux avec le modèle TLS. Cependant, on peut remarquer l'existence de deux points majeurs à améliorer pour augmenter la qualité des résultats. D'une part, la fonction d'adoucissement obtenue à partir du comportement cohésif bi-linéaire n'est que continue par morceaux et sa dérivée est donc discontinue. Il serait sans doute pertinent de chercher une autre fonction plus adaptée au cadre d'endommagement continu tout en gardant ses propriétés de comportement satisfaisantes. D'autre part, l'implémentation du modèle TLS utilisée dans ces travaux ne prend en compte que l'endommagement localisé. Permettre au modèle le développement d'un endommagement diffus supplémentaire pourrait rapprocher les résultats des simulations des observations expérimentales ou des simulations mésoscopiques du type du modèle *lattice*. Ceci serait bénéfique, notamment pour les plus petites éprouvettes.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Ces travaux, menés au cours de ces trois dernières années au sein de l'institut de recherche GeM à Nantes, avaient pour but l'analyse d'un modèle d'endommagement naissant qui avait commencé à faire ses preuves lorsque ces travaux ont été entrepris. L'objectif était donc de contribuer à la compréhension des résultats et à la maîtrise du choix des paramètres régissant le modèle afin de prouver sa capacité à rendre compte des comportements connus des matériaux quasi-fragiles et notamment du béton. Pour ce faire, une analyse comparative avec le modèle de fissure cohésive était envisagée, ce dernier ayant une place privilégiée dans les familles de modèles utilisés pour représenter la ruine des structures quasi-fragiles.

L'analyse bibliographique qui a été menée a mis en relief l'origine mixte de ce modèle, à mi-chemin entre les modèles d'endommagement continu et les modèles par front d'endommagement, bénéficiant des avantages de ces deux familles : la simplicité de résolution propre aux modèles par front d'endommagement — où la non-localité nécessaire à la régularisation du problème reste très limitée — et la modélisation continue de la dégradation — point essentiel d'une représentation spatiale correcte de l'endommagement d'un matériau quasi-fragile —. Des études préliminaires ont présenté la versatilité du modèle et l'intérêt qu'il présente vis-à-vis de l'unicité de la solution qui est recherchée. On s'est ensuite intéressé à la propagation d'une zone endommagée de type quasi-fissure, c'est-à-dire, macroscopiquement équivalente à une fissure dans un milieu élastique mais ayant localement une structure propre au modèle et représentée par une hétérogénéité des propriétés mécaniques. Cette analyse a un intérêt particulier qui est de montrer comment, avec le modèle TLS, il est possible de représenter une zone endommagée comportant un saut de déplacement et se propageant de façon auto-similaire dans un milieu initialement sain. Ceci n'est pas le cas de la plupart des modèles d'endommagement, où la valeur maximale de celui-ci est limitée afin d'éviter des difficultés numériques liées à la prise en compte d'un matériau totalement endommagé et impliquant des contraintes non nulles et des déformations infinies. Une fois que le modèle a été analysé d'un point de vue théorique, on s'est intéressé à sa confrontation aux phénomènes physiques liés à la ruine des structures quasi-fragiles. Notamment, le modèle TLS a été confronté aux lois classiques d'effet d'échelle. Bien qu'il ait montré une bonne capacité à rendre compte de cet effet de façon asymptotique, il a été nécessaire de chercher un comportement d'adoucissement local permettant de mieux représenter les résultats expérimentaux. Ainsi, une équivalence unidimensionnelle établie entre TLS et modèle cohésif a permis de rapprocher le comportement, aussi bien local que global, de ces deux modèles en transférant les propriétés de représentation de l'effet d'échelle du modèle cohésif au modèle TLS. Ces bonnes propriétés ont finalement été confirmées par une comparaison entre les résultats du modèle TLS et ceux de trois autres modèles et des campagnes expérimentales récentes faisant intervenir un grand nombre d'éprouvettes homothétiques avec différentes profondeurs d'entaille. Le modèle

TLS s'est avéré capable de rendre compte de résultats expérimentaux récents et complets.

Bien que les résultats obtenus dans cette confrontation avec l'expérience soient très satisfaisants, il est nécessaire de préciser les points clés d'une amélioration de leur qualité, sans oublier de rappeler le cadre restreint de ces travaux. D'une part, plusieurs méthodes de résolution des problèmes numériques utilisées dans ces travaux ont évolué au cours de ces dernières années, notamment la représentation de la fonction de niveau — dont la description par un scalaire simple a été remplacée par une fonction de niveau vectorielle signée permettant une description précise des lèvres de la quasi-fissure — ou le calcul de la fonction de niveau à partir de la position du front — pour laquelle l'implémentation d'une méthode de *fast-marching* ou de propagation SUPG ont amélioré la qualité —. D'autre part, le cadre restreint de matériau quasi-fragile soumis à un chargement quasi-statique en petites déformations est déjà actuellement élargi par différents travaux, comme l'ajout d'une résolution couplée d'endommagement local et non-local [61] ou la considération de chargements dynamiques [59]. D'autres travaux de représentation de structures plus complexes, comportant des armatures, sont aussi étudiées actuellement.

Annexe I

Cas d'un cylindre soumis à une extension radiale uniforme

I.1 Modèle d'endommagement par front mince

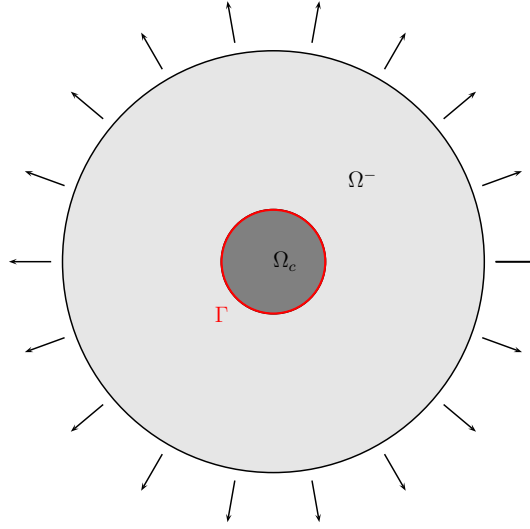


Figure I.1 – Cylindre en traction s'endommageant suivant le modèle de front mince. La zone saine Ω^- (gris clair) est séparée de la zone endommagée Ω_c (gris foncé) par le front d'endommagement Γ (en rouge).

Considérons à présent un cylindre de base circulaire et de rayon extérieur R_e . Le cylindre est soumis à un chargement d'extension radiale (cf. figure I.1). Le déplacement solution est supposé purement radial $\mathbf{u}(r) = u(r)\mathbf{e}_r$, avec la condition aux limites : $\mathbf{u}(R_e) = R_e\Delta$ et $u(0) = 0$ par symétrie. On note toujours $\Sigma = \sigma_{rr}(R_e)$ la contrainte normale sur le bord extérieur.

La position γ du front d'endommagement Γ détermine la structure du solide biphasé qu'est le cylindre en cours d'endommagement. On suppose un comportement élastique linéaire suivant la loi de Hooke

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbb{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{I.1})$$

De plus, le matériau sain et le matériaux endommagé se différencient uniquement par leur premier coefficient de Lamé λ qui vaut λ_s et λ_d respectivement. Le module de cisaillement μ — ou deuxième coefficient de Lamé — est supposé constant afin de simplifier la résolution des équations

tions. L'équilibre du solide en tout point implique

$$u_i(r) = \frac{C_i}{2\Lambda_i}r + \frac{D_i}{r} \quad \text{avec } i = s \text{ ou } d, \quad (\text{I.2})$$

où $\Lambda_i = \lambda_i + 2\mu$. C_i et D_i sont des constantes par phase à état d'endommagement fixé. La continuité du déplacement et de la contrainte radiale à l'interface Γ et les conditions aux limites déterminent complètement la solution du problème d'élasticité hétérogène :

$$\begin{cases} C_s = C_d = C, \\ C = \frac{2}{\frac{1}{\Lambda_s} + \left(\frac{1}{\Lambda_d} - \frac{1}{\Lambda_s}\right) \left(\frac{\gamma}{R}\right)^2} \Delta, \\ D_s = \left(\frac{1}{\Lambda_d} - \frac{1}{\Lambda_s}\right) \frac{\gamma^2}{2} C, \\ D_d = 0. \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

On en déduit grâce à la relation de comportement :

$$\Sigma = \sigma_{rr}(R_e) = C - 2\mu\Delta \quad (\text{I.4})$$

Pendant les phases *I* et *V*, C est une fonction linéaire de Δ et il en est de même pour Σ . En ce qui concerne la phase d'endommagement *III*, rappelons le critère d'endommagement local conduisant à l'avancée du front 1.34 :

$$g = \llbracket w \rrbracket_\Gamma - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \llbracket \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma \quad (\text{I.5})$$

En notant r la distance d'un point courant à l'axe du cylindre, on a d'une part

$$w(x, \gamma) = \frac{C_i^2}{2} \frac{\lambda_i + \mu}{\Lambda_i^2} + 2\mu \frac{D_i^2}{r^4} \quad \text{d'où} \quad \llbracket w \rrbracket_\Gamma = \frac{C^2}{2} \left(\frac{1}{\Lambda_s} - \frac{\lambda_d}{\Lambda_d^2} - \frac{2\mu}{\Lambda_s \Lambda_d} \right) \quad (\text{I.6})$$

D'autre part,

$$\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{C_i}{2\Lambda_i} - \frac{D_i}{r^2} \right) \mathbf{e}_r \quad \text{d'où} \quad \llbracket \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_\Gamma = C \left(\frac{1}{\Lambda_s} - \frac{1}{\Lambda_d} \right) \mathbf{e}_r \quad (\text{I.7})$$

Finalement, la relation

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \frac{\lambda_d + \mu}{\Lambda_d} C \mathbf{e}_r \quad (\text{I.8})$$

conduit à l'écriture de la loi d'évolution 1.35

$$\frac{C^2}{2} \left(\frac{1}{\Lambda_d} - \frac{1}{\Lambda_s} \right) - g_c \leq 0, \quad a \geq 0, \quad (g - g_c) \cdot a = 0 \quad (\text{I.9})$$

Ainsi, l'avancée du front d'endommagement a lieu lorsque

$$C^2 = \frac{g_c}{\frac{1}{\Lambda_d} - \frac{1}{\Lambda_s}} \quad (\text{I.10})$$

i.e., lorsque C est une constante. On en déduit par (I.4) que la courbe de comportement global Δ - Σ pendant la phase *III* est affine de pente -2μ (cf. I.2). Le comportement du cylindre est représenté en figure I.2.

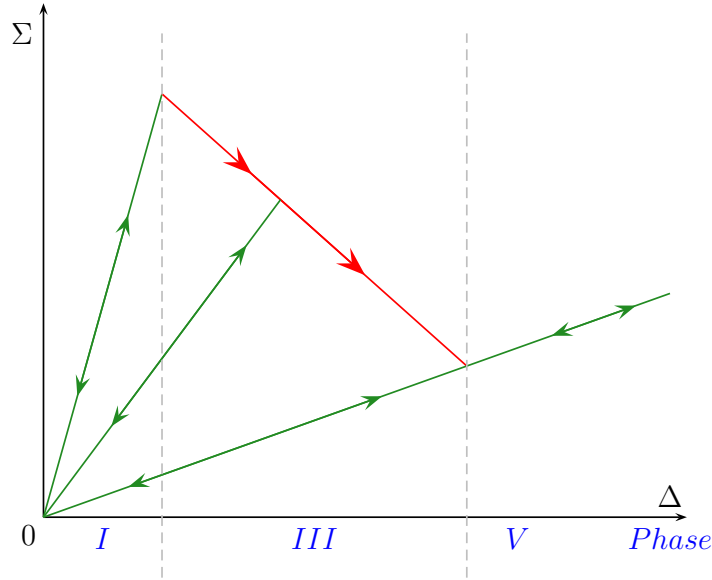


Figure I.2 – Comportement d'un cylindre en extension radiale uniforme sous le modèle d'endommagement par front mince. Les parties vertes correspondent aux chargements et déchargements élastiques. L'évolution de l'endommagement a lieu sur la partie rouge.

I.2 Modèle d'endommagement par front épais

I.2.1 Choix du comportement du matériau

On suppose que lors de l'endommagement, seul le premier coefficient de Lamé λ varie ; le coefficient de cisaillement μ est supposé constant et uniforme.

On pose $\frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{\lambda + 2\mu}$ et on choisit un modèle d'endommagement tel que $\frac{1}{\Lambda} = \frac{1 - \hat{\phi}}{\Lambda_s} + \frac{\hat{\phi}}{\Lambda_d}$,

ce qui conduit à

$$\left\{ \begin{array}{lll} \left(\frac{1}{\Lambda}\right)(\hat{\phi}) = \frac{1}{\Lambda_s} & \text{si } \hat{\phi} \leq 0 & i.e. \text{ dans } \Omega_s \\ \left(\frac{1}{\Lambda}\right)'(\hat{\phi}) = \frac{1}{\Delta\Lambda} & \text{si } 0 \leq \hat{\phi} \leq 1 & i.e. \text{ dans } \Omega_t \\ \left(\frac{1}{\Lambda}\right)(\hat{\phi}) = \frac{1}{\Lambda_d} & \text{si } \hat{\phi} \geq 1 & i.e. \text{ dans } \Omega_d \end{array} \right. \quad (\text{I.11})$$

Notons que $\Delta\Lambda$ n'est pas la différence de Λ_d et Λ_s ;

$$\frac{1}{\Delta\Lambda} = \frac{1}{\Lambda_d} - \frac{1}{\Lambda_s}. \quad (\text{I.12})$$

I.2.2 Choix du profil d'endommagement

I.2.2.1 Premier modèle d'endommagement

$$\left\{ \begin{array}{lll} d(\hat{\phi}) = 0 & \text{si } \hat{\phi} \leq 0 & i.e. \text{ dans } \Omega^- \\ d(\hat{\phi}) = \hat{\phi} & \text{si } 0 \leq \hat{\phi} \leq 1 & i.e. \text{ dans } \Omega^+ \\ d(\hat{\phi}) = 1 & \text{si } \hat{\phi} \geq 1 & i.e. \text{ dans } \Omega_c \end{array} \right. \quad (\text{I.13})$$

Rappelons le critère d'avancée du front d'endommagement donné en 1.3.3 : l'avancée se produit lorsque f_{TLS} s'annule. On admet ici $f_{\text{CDM}} = Y - Y_c$ avec Y_c constant. Ainsi

$$f_{\text{TLS}} = \frac{\int_{\phi=0}^{\ell} Y j d'(\hat{\phi}) d\phi}{\int_{\phi=0}^{\ell} d'(\hat{\phi}) d\phi} - Y_c \quad (\text{I.14})$$

I.2.2.2 Deuxième modèle d'endommagement

$$\left\{ \begin{array}{lll} d(\hat{\phi}) = 0 & \text{si } \hat{\phi} \leq 0 & i.e. \text{ dans } \Omega^- \\ d(\hat{\phi}) = \hat{\phi} (1 + \chi - \chi \hat{\phi}^{\xi}) & \text{si } 0 \leq \hat{\phi} \leq 1 & i.e. \text{ dans } \Omega^+ \\ d(\hat{\phi}) = 1 & \text{si } \hat{\phi} \geq 1 & i.e. \text{ dans } \Omega_c \end{array} \right. \quad (\text{I.15})$$

où χ et ξ sont des coefficients sans dimension. La condition d'admissibilité (I.13) s'écrit

$$\forall \hat{\phi} \in [0; 1], d'(\hat{\phi}) = (1 + \chi - \chi(\xi + 1)\hat{\phi}^{\xi}) \geq 0, \quad (\text{I.16})$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi \geq 0 \\ \chi \xi \leq 1. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (\text{I.17})$$

On impose $\xi > 0$ et $\chi > 0$. La condition est ainsi réduite à $\chi \xi \leq 1$.

I.2.3 Équations d'équilibre et taux de dissipation

Considérons un cylindre de base circulaire de rayon extérieur R_e . Le cylindre est soumis à un chargement d'extension radiale. Le déplacement solution est supposé purement radial $\mathbf{u}(r) = u(r)\mathbf{e}_r$, avec la condition aux limites : $\mathbf{u}(R_e) = R_e\Delta$. On note toujours $\Sigma = \sigma_{rr}(R_e)$.

On suppose la solution axisymétrique, *i.e.* $\mathbf{u}(r) = u(r)\mathbf{e}_r$. Alors

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{u}{r}\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \quad \text{et} \quad \text{tr}(\varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}. \quad (\text{I.18})$$

La comportement est supposé élastique linéaire isotrope, donc $\sigma = \lambda \text{tr}(\varepsilon)\mathbb{I} + 2\mu\varepsilon$ et l'énergie élastique est notée w .

L'équation d'équilibre $\text{div}(\sigma) = \mathbf{0}$ s'écrit alors, sous l'hypothèse de coefficient de cisaillement μ constant

$$ru(r) = A \int_0^r \frac{\rho \, d\rho}{\Lambda} \quad (\text{I.19})$$

où A est une constante qui dépend de l'état d'endommagement du matériau.

La relation de comportement du solide s'écrit :

$$\Sigma = \left(\frac{A}{\Delta} - 2\mu \right) \Delta \quad \text{avec} \quad A = \frac{R_e^2}{\int_0^{R_e} \frac{\rho \, d\rho}{\Lambda}} \Delta \quad (\text{I.20})$$

et le taux de dissipation s'exprime alors

$$Y = -\frac{\partial w}{\partial d} = -\frac{1}{d'} \frac{\partial w}{\partial \hat{\phi}} \quad (\text{I.21})$$

donc,

$$Y = \frac{1}{2d'} \frac{\partial}{\partial \hat{\phi}} \left(\frac{A^2}{\Lambda} \right) \quad (\text{I.22})$$

I.2.4 Analyse du premier modèle

Dans le cas du premier modèle, on obtient

$$Y = \frac{1}{2} \frac{1}{d'} \frac{A^2}{\Delta\Lambda} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\Delta\Lambda} = \frac{1}{\Delta\Lambda_d} - \frac{1}{\Delta\Lambda_s} \quad (\text{I.23})$$

La force thermodynamique Y est uniforme dans le solide, donc

$$Y = \frac{A^2}{2\Delta\Lambda} = \bar{Y}. \quad (\text{I.24})$$

L'initiation d'une zone d'endommagement est possible en tout point. Cette propriété du modèle est vraie pendant la phase élastique (*I*), la phase d'initiation (*II*) et la phase de propagation (*III*). Cette caractéristique, liée au choix du modèle, pose des problèmes de bifurcation. Plusieurs évolutions sont alors possibles, la propagation de différentes zones de transition et l'initiation de nouvelles zones endommagées.

I.2.4.1 Étude par phase d'endommagement

I.2.4.1.1 Comportement élastique sain La condition aux limites en déplacement impose $A = 2\Lambda_s\Delta$, la solution est alors de la forme $u(r) = r\Delta$ et $\sigma = 2(\Lambda_s - \mu)\Delta I$ et le comportement global a pour module $\kappa_s = 2(\lambda_s + \mu)$:

$$\Sigma = 2(\Lambda_s - \mu)\Delta = \kappa_s\Delta \quad (\text{I.25})$$

I.2.4.1.2 Apparition de la zone d'endommagement Notons ℓ la position d'un front d'endommagement repérée par la surface $\phi = 0$. La bande d'endommagement est donc un cylindre de rayon ℓ inférieur à ℓ_c centrée en 0.

Comme

$$\int_0^{R_e} \frac{\rho \, d\rho}{\Lambda} = \frac{1}{2} \frac{R_e^2}{\Lambda_s} + \frac{1}{6} \frac{R_i^3}{\ell_c} \frac{1}{\Delta\Lambda}, \quad (\text{I.26})$$

la loi de comportement du solide est

$$\Sigma = \left(\frac{2}{\left(\frac{1}{\Lambda_s} + \frac{1}{3} \frac{\beta^2}{\alpha} \frac{1}{\Delta\Lambda} \right)} - 2\mu \right) \Delta \quad (\text{I.27})$$

avec $\alpha = \frac{\ell_c}{\ell}$ et $\beta = \frac{\ell}{R_e}$.

Il y a évolution du front d'endommagement lorsque $\bar{Y} = Y_c$ *i.e.*

$$\Delta = \sqrt{\frac{Y_c\Delta\Lambda}{2}} \left(\frac{1}{\Lambda_s} + \frac{1}{3} \frac{\beta^2}{\alpha} \frac{1}{\Delta\Lambda} \right) \quad (\text{I.28})$$

.

Si on impose une déformation Δ croissante, le cylindre suit la loi de comportement

$$\Sigma = \sqrt{2Y_c\Delta\Lambda} - 2\mu\Delta. \quad (\text{I.29})$$

I.2.4.1.3 Déplacement de la zone d'endommagement Une fois que la bande d'endommagement a atteint sa largeur maximale ℓ_c , elle se propage dans le milieu.

Alors,

$$\int_0^{R_e} \frac{\rho \, d\rho}{\Lambda} = \frac{\ell^2}{2} \left(\frac{1}{\Lambda_s} \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\Delta\Lambda} f(\alpha) \right) \quad (\text{I.30})$$

avec

$$f(\alpha) = (1 - \alpha^2) + \frac{1 - (1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha)}{3\alpha} = \frac{1}{3}\alpha^2 - \alpha + 1 \quad (\text{I.31})$$

La relation de comportement est alors

$$\Sigma = \left(\frac{2}{\frac{1}{\Lambda_s} + \frac{1}{3}\beta^2 f(\alpha) \frac{1}{\Delta\Lambda}} - 2\mu \right) \Delta. \quad (\text{I.32})$$

Le critère d'évolution du front est atteint lorsque

$$\Delta = \sqrt{\frac{Y_c \Delta \Lambda}{2}} \left(\frac{1}{\Lambda_s} + \frac{1}{\Delta\Lambda} \beta^2 f(\alpha) \right), \quad (\text{I.33})$$

d'où le comportement en chargement monotone croissant

$$\Sigma = \sqrt{2Y_c \Delta \Lambda} - 2\mu \Delta. \quad (\text{I.34})$$

On remarque que lorsque $\alpha = 1$, il y a continuité du comportement entre les deux phases de l'endommagement.

I.2.4.1.4 Disparition de la zone d'endommagement Lorsque le front d'endommagement atteint le bord extérieur du cylindre, la bande commence à disparaître. Pendant cette phase, on vérifie $\ell \geq R_e \geq \ell - \ell_c$.

Alors,

$$\int_0^{R_e} \frac{\rho \, d\rho}{\Lambda} = \frac{\ell^2}{2} \left(\frac{1}{\Lambda_s} \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\Delta\Lambda} g(\alpha, \beta) \right). \quad (\text{I.35})$$

avec

$$g(\alpha, \beta) = \frac{1}{3\alpha} \left(\frac{3\beta - 2}{\beta^3} + \alpha - 1 \right) \quad (\text{I.36})$$

La relation de comportement est donc

$$\Sigma = \left(\frac{2}{\frac{1}{\Lambda_s} + \frac{1}{\Delta\Lambda} \beta^2 g(\alpha, \beta)} - 2\mu \right) \Delta. \quad (\text{I.37})$$

Le critère d'évolution du front est atteint lorsque

$$\Delta = \sqrt{\frac{Y_c \Delta \Lambda}{2}} \left(\frac{1}{\Lambda_s} + \frac{1}{\Delta \Lambda} \beta^2 g(\alpha, \beta) \right), \quad (\text{I.38})$$

d'où le comportement en chargement monotone croissant

$$\Sigma = \sqrt{2Y_c \Delta \Lambda} - 2\mu \Delta. \quad (\text{I.39})$$

I.2.4.1.5 Comportement élastique endommagé Le résultat est identique au comportement élastique sain, avec $\Lambda = \Lambda_d$. Donc

$$\Sigma = 2(\Lambda_d - \mu)\Delta = \kappa_d \Delta \quad (\text{I.40})$$

et il n'y a plus d'évolution possible.

La courbe de comportement est représentée en figure I.3.

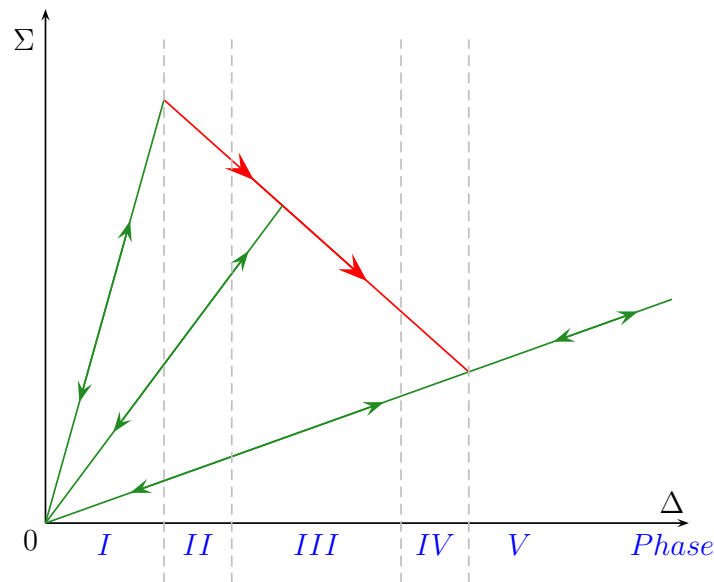


Figure I.3 – Comportement d'un cylindre en extension radiale. - Modèle d'endommagement à transition continue avec un profil d'endommagement linéaire. En vert, les trajets réversibles et en rouge, le trajet irréversible d'endommagement.

I.2.4.2 Discontinuités de la courbe de comportement

La courbe de comportement est une suite de trois segments ; il n'y a donc que deux discontinuités, la première lors de la transition entre les phases *I* et *II* et la deuxième entre les phases *IV* et *V*. L'apparition de la deuxième surface de discontinuités et la disparition de la première n'introduisent donc pas de discontinuités dans la dérivée de la courbe de comportement.

Avec ce modèle d'endommagement, le comportement du cylindre sous chargement monotone de traction à déplacement imposé est composé de trois segments : le premier et le dernier correspondent aux comportements élastiques sain et endommagé, et le deuxième correspond à l'évolution de l'endommagement et sa propagation. Il faut remarquer que, en ce qui concerne le comportement macroscopique, il n'y a pas de différence entre chacune des phases d'évolution du front d'endommagement (phases *II*, *III* et *IV*), ce qui rapproche ce modèle de celui avec transition brutale.

I.2.5 Analyse du deuxième modèle d'endommagement

Une courbe de comportement macroscopique issue de l'analyse qui suit est donnée en figure I.4. On étudie les comportements limites lors de l'apparition et la disparition du front d'endommagement.

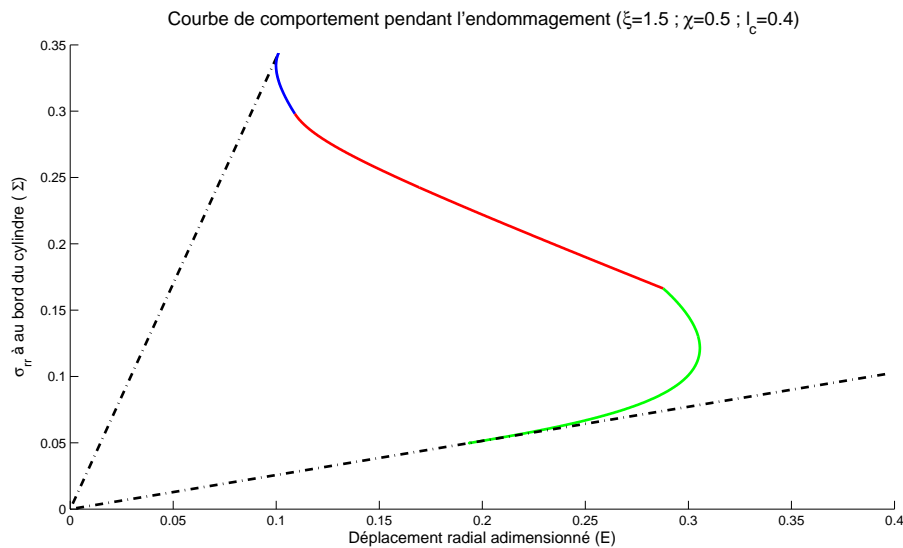


Figure I.4 – Comportement d'un cylindre en extension radiale. - Modèle d'endommagement à transition continue avec le deuxième profil d'endommagement donné. En trait mixte noir les comportements élastiques sain (phase I) et endommagé (phase V). En bleu, le développement de la zone d'endommagement (phase II), en rouge, son avancée avec une taille fixe l_c (phase III) et en vert, sa disparition (phase IV).

Le critère d'avancement du front d'endommagement s'écrit

$$Y_c = \bar{Y} = \frac{A^2}{2\Delta\Lambda} \frac{\int_{\mathcal{B}} \rho \, d\rho}{(1 + \chi) \int_{\mathcal{B}} \rho \, d\rho - \chi(\xi + 1) \int_{\mathcal{B}} \left(\frac{\ell - \rho}{\ell_c}\right)^\xi \rho \, d\rho} \quad (\text{I.41})$$

avec

$$A = \frac{R_e^2}{\int_0^{R_e} \frac{\rho \, d\rho}{\Lambda}} \Delta. \quad (\text{I.42})$$

Ce modèle n'impose plus un Y uniforme et permet donc l'évolution de front d'endommagement sans que le critère d'initiation soit atteint ailleurs dans le matériau sain, car Y est alors inférieur à Y_c dans ce domaine dès l'apparition d'une zone endommagée au centre du cylindre. Il n'existe donc pas de bifurcation de la solution du problème d'endommagement provoquée par l'apparition de nouveaux fronts. Les seules bifurcation possibles sont la perte d'axisymétrie de la propagation, que est étudiée dans la partie 2.3.

I.2.5.1 Étude par phase d'endommagement

I.2.5.1.1 Apparition de la zone d'endommagement Le front d'endommagement commence à se développer lorsque

$$A = \sqrt{2Y_c\Delta\Lambda(1 + \chi)}. \quad (\text{I.43})$$

Le déplacement et la contrainte vérifient alors les deux relations de comportement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma = (2\Lambda_s - 2\mu)\Delta \quad \text{et} \quad \Sigma = A - 2\mu\Delta. \end{array} \right. \quad (\text{I.44})$$

Donc, l'évolution du front se produit lorsque $\Delta = \Delta_a$, avec

$$\Delta_a = \sqrt{\frac{Y_c\Delta\Lambda}{2}(1 + \chi)}. \quad (\text{I.45})$$

Le point critique est donc plus élevé que pour le premier modèle d'endommagement et pour le modèle d'interface infiniment mince.

Étudions maintenant l'évolution de la déformation et de la contrainte imposées lors de l'avancement du front au moment de l'apparition de celui-ci. À cette fin, notons

$$I = \frac{1}{R_e^2} \int_0^{R_e} \frac{\rho \, d\rho}{\Lambda}. \quad (\text{I.46})$$

On a alors

$$\Delta = AI, \quad \Rightarrow \frac{d\Delta}{d\ell} = I \frac{dA}{d\ell} + A \frac{dI}{d\ell} \quad (\text{I.47})$$

et

$$\Sigma = A - 2\mu\Delta \quad \Rightarrow \frac{d\Sigma}{d\ell} = \frac{dA}{d\ell} - 2\mu \frac{d\Delta}{d\ell} \quad \Rightarrow \frac{d\Sigma}{d\ell} = (1 - 2\mu I) \frac{dA}{d\ell} - 2\mu A \frac{dI}{d\ell}. \quad (\text{I.48})$$

Or,

$$\begin{cases} I(\ell=0) = \frac{1}{2} \frac{1}{\Lambda_s} \\ \frac{dI}{d\ell}(\ell \rightarrow 0) \sim \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{\ell_c R_e^2} \frac{1}{\Lambda_s}, \end{cases} \quad (\text{I.49})$$

et lors de l'évolution,

$$A^2 = 2Y_c \Delta \Lambda \left(1 + \chi - \chi \frac{2}{\xi + 2} \alpha^{-\xi} \right), \quad (\text{I.50})$$

donc

$$\begin{cases} A(\ell=0) = \sqrt{2Y_c \Delta \Lambda (1 + \chi)} \\ \frac{dA}{d\ell}(\ell \rightarrow 0) \sim -\sqrt{\frac{Y_c \Delta \Lambda}{2}} \frac{2\xi}{\xi + 2} \frac{\chi}{\sqrt{1 + \chi}} \frac{\ell^{\xi-1}}{\ell_c^\xi}. \end{cases} \quad (\text{I.51})$$

On en conclut que les évolutions des deux grandeurs s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d\Delta}{d\ell}(\ell \rightarrow 0) = -K_A^\Delta \ell^{\xi-1} + K_I^\Delta \ell^2 \\ \frac{d\Sigma}{d\ell}(\ell \rightarrow 0) = -K_A^\Sigma \ell^{\xi-1} - K_I^\Sigma \ell^2 \end{cases} \quad (\text{I.52})$$

où les K_I^j sont des constantes positives.

Trois cas se présentent :

- si $\xi < 3$, alors $\frac{d\Sigma}{d\Delta} = \frac{K_A^\Sigma}{K_A^\Delta}$. Dans ce cas, la courbe revient en arrière. En effet, $\frac{d\Delta}{d\ell} < 0$ donc la propagation ne peut pas se produire de façon quasi-statique.
- si $\xi > 3$, alors $\frac{d\Sigma}{d\Delta} = -\frac{K_I^\Sigma}{K_I^\Delta}$. Ici $\frac{d\Delta}{d\ell} > 0$.
- si $\xi = 3$, alors $\frac{d\Sigma}{d\Delta} = \frac{K_A^\Sigma + K_I^\Sigma}{K_A^\Delta - K_I^\Delta}$. Cette solution ne présente pas de retour en arrière si $-K_A^\Delta + K_I^\Delta > 0$

I.2.5.1.2 Cas $\xi < 3$: $\frac{d\Sigma}{d\Delta} = \kappa_s$. La courbe de comportement présente un retour en arrière suivant la même pente en $\Delta = \Delta_a$. Cette solution quasi-statique ne peut pas exister dans le cas d'un chargement monotone croissant.

I.2.5.1.3 Cas $\xi > 3$: $\frac{d\Sigma}{d\Delta} = -2\mu$. La courbe de comportement est équivalente en $\Delta = \Delta_a$ à celle du premier modèle et du modèle de front mince ; on observe une cassure en ce point.

I.2.5.1.4 Cas $\xi = 3$: On a

$$\frac{d\Sigma}{d\Delta} = -2\mu + \frac{2\Lambda_s}{1 - \frac{10}{3} \frac{\sqrt{1+\chi}}{\chi} \left(\frac{\ell_c}{R_e}\right)^2 \frac{\Lambda_s}{\Delta\Lambda}}. \quad (\text{I.53})$$

La courbe de comportement globale présente une discontinuité de pente. La pente après l'initiation est soit plus grande que κ_s soit plus petite que -2μ . Elle peut aussi être infinie, croissante ou décroissante et présenter un *snap-back*.

I.2.5.1.5 Disparition de la zone d'endommagement Dans le cas où la zone de transition atteint le rayon externe R_e , on étudie le comportement global du cylindre.

On pose $\delta = 1 - \frac{\ell - \ell_c}{R_e}$. On s'intéresse donc au comportement lorsque $\delta \rightarrow 0^+$, c'est à dire lorsque la zone de transition disparaît.

Au cours de cette phase de l'endommagement, on a :

$$\begin{cases} A^2 = 2\Delta\Lambda Y_c \left((1+\chi) - \frac{2\chi \frac{\ell_c}{R_e} \left((1-\delta) - (1-\delta)^{\xi+1} + \frac{\ell_c}{R_e} \frac{1}{\xi+2} (1 - (1-\delta)^{\xi+2}) \right)}{1 - (1-\delta)^2} \right) \\ I = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Lambda_s} + \left(1 + \frac{R_e}{\ell_c} (1-\delta)(1 - (1-\delta)^2) - \frac{2}{3} \frac{R_e}{\ell_c} (1 - (1-\delta)^3) \right) \frac{1}{\Delta\Lambda} \right). \end{cases} \quad (\text{I.54})$$

La déformation de disparition du front Δ_d vérifie

$$\begin{cases} \Sigma_d = A - 2\mu\Delta_d \\ \Sigma_d = \kappa_d\Delta_d. \end{cases} \quad (\text{I.55})$$

On en déduit que

$$\Delta_d = \sqrt{\frac{Y_c\Delta\Lambda}{2}} \frac{1}{\Lambda_d} \sqrt{1 + \chi - \chi \frac{\ell_c}{R_e} \left(\xi + \frac{\ell_c}{R_e} \right)}. \quad (\text{I.56})$$

Cette déformation est supérieure à celle du premier modèle et du modèle d'interface mince si $\frac{\ell_c}{R_e}$ est assez petit devant 1.

Intéressons nous maintenant à la forme de la courbe de comportement en ce point. On rap-

pelle que

$$\begin{cases} \frac{d\Delta}{d\ell} = I \frac{dA}{d\ell} + A \frac{dI}{d\ell} \\ \frac{d\Sigma}{d\ell} = (1 - 2\mu I) \frac{dA}{d\ell} - 2\mu A \frac{dI}{d\ell}. \end{cases} \quad (\text{I.57})$$

On en déduit

$$\frac{d\Delta}{d\ell} (\delta \rightarrow 0^+) \sim \sqrt{2Y_c \Delta \Lambda} \sqrt{1 + \chi - \chi \frac{\ell_c}{R_e} (\xi + \frac{\ell_c}{R_e})} \left(\frac{1}{\Delta \Lambda} \frac{1}{\ell_c} - \frac{1}{\Lambda_d} \frac{1}{6R_e} \frac{\frac{\ell_c}{R_e} \chi \xi (\xi + 1) (\xi - 1 + \frac{\ell_c}{R_e})}{1 + \chi - \chi \frac{\ell_c}{R_e} (\xi + \frac{\ell_c}{R_e})} \right) \delta. \quad (\text{I.58})$$

Le signe de $\frac{d\Delta}{d\ell} (\delta \rightarrow 0^+)$ dépend de $\frac{\ell_c}{R_e}$, ξ et χ . Notamment, si $\frac{\ell_c}{R_e} \rightarrow 0$ alors $\frac{d\Delta}{d\ell} (\delta \rightarrow 0^+) > 0$. Par ailleurs,

$$\frac{dA}{d\ell} (\delta \rightarrow 0^+) \sim -\sqrt{2Y_c \Delta \Lambda} \sqrt{1 + \chi - \chi \frac{\ell_c}{R_e} (\xi + \frac{\ell_c}{R_e})} \frac{1}{\Lambda_d} \frac{1}{6R_e} \frac{\frac{\ell_c}{R_e} \chi \xi (\xi + 1) (\xi - 1 + \frac{\ell_c}{R_e})}{1 + \chi - \chi \frac{\ell_c}{R_e} (\xi + \frac{\ell_c}{R_e})} \delta. \quad (\text{I.59})$$

Donc, si $\frac{d\Delta}{d\ell} (\delta \rightarrow 0^+) > 0$, alors $\frac{d\Sigma}{d\ell} (\delta \rightarrow 0^+) = \frac{dA}{d\ell} (\delta \rightarrow 0^+) - 2\mu \frac{d\Delta}{d\ell} (\delta \rightarrow 0^+) < 0$. Notons que tous les termes sont d'ordre 1 en δ .

I.2.5.2 Discontinuités de la courbe de comportement

La présence de discontinuités entre les phases *I* et *II* et entre les phases *IV* et *V* découlent de l'étude précédente. Il reste à étudier le cas des transitions *II-III* et *III-IV*.

Posons

$$J = \frac{\int_{\mathcal{B}} \left(\frac{\ell - \rho}{\ell_c} \right)^\xi \rho \, d\rho}{\int_{\mathcal{B}} \rho \, d\rho}. \quad (\text{I.60})$$

La continuité de A découle de celle de J . Il suffit donc d'étudier la continuité de I et de J pour en déduire celle de la courbe de comportement.

Notons que $\frac{dI}{d\ell}$ est continu entre les différentes phases en raison du choix de $\frac{1}{\Lambda}$. En effet,

$$\frac{dI}{d\ell} = \frac{1}{\ell_c \Delta \Lambda} \int_{\mathcal{B}} \rho \, d\rho \quad (\text{I.61})$$

est continu entre toutes les phases.

Étudions maintenant la continuité J entre les différentes phases. Celle du comportement en découle.

I.2.5.2.1 Transition II-III

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{II} = \frac{2}{(\xi+1)(\xi+2)} \left(\frac{\ell}{\ell_c} \right)^\xi \\ J_{III} = \frac{(\xi+2)\ell - (\xi+1)\ell_c}{(\xi+1)(\xi+2)(\ell - \frac{\ell_c}{2})}, \end{array} \right. \text{ et} \quad (\text{I.62})$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dJ_{II}}{d\ell} = \frac{2}{(\xi+1)\ell_c} \left(\frac{\ell}{\ell_c} \right)^{\xi-1} \\ \frac{dJ_{III}}{d\ell} = \frac{\xi}{2(\xi+1)(\xi+2)} \frac{\ell_c}{\left(\ell - \frac{\ell_c}{2} \right)^2}. \end{array} \right. \text{ et} \quad (\text{I.63})$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dJ_{II}}{d\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \ell_c} \frac{2}{(\xi+1)\ell_c} \\ \frac{dJ_{III}}{d\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \ell_c} \frac{\xi}{(\xi+1)(\xi+2)\ell_c}. \end{array} \right. \quad (\text{I.64})$$

Comme $\xi > 0$, ces deux limites sont différentes.

I.2.5.2.2 Transition III-IV

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{III} = \frac{(\xi+2)\ell - (\xi+1)\ell_c}{(\xi+1)(\xi+2)(\ell - \frac{\ell_c}{2})} \\ J_{IV} = \frac{2}{(\xi+1)(\xi+2)} \frac{\ell_c}{R_e^2 - (\ell - \ell_c)^2} \left((\xi+2)\ell - (\xi+1)\ell_c - \left(\frac{\ell - R_e}{\ell_c} \right)^{\xi+1} (\ell + (\xi+1)R_e) \right), \end{array} \right. \text{ et} \quad (\text{I.65})$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dJ_{III}}{d\ell} = \frac{\xi}{2(\xi+1)(\xi+2)} \frac{\ell_c}{\left(\ell - \frac{\ell_c}{2} \right)^2} \\ \frac{dJ_{IV}}{d\ell} = \frac{2}{(\xi+1)(\xi+2)} \left[\frac{2(\ell - \ell_c)\ell_c}{(R_e^2 - (\ell - \ell_c)^2)^2} \right. \\ \quad \left((\xi+2)\ell - (\xi+1)\ell_c \left(\frac{\ell - R_e}{\ell_c} \right)^{\xi+1} (\ell + (\xi+1)R_e) \right) \\ \quad \left. + \frac{\ell_c}{R_e^2 - (\ell - \ell_c)^2} \left((\xi+2) - (\xi+1) \frac{(\ell - R_e)^\xi}{\ell_c^{\xi+1}} (\ell + (\xi+1)R_e) - \left(\frac{\ell - R_e}{\ell_c} \right)^{\xi+1} \right) \right]. \end{array} \right. \text{ et} \quad (\text{I.66})$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dJ_{III}}{d\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \ell_c} \frac{\xi}{2(\xi+1)(\xi+2)} \frac{\ell_c}{\left(R_e - \frac{\ell_c}{2}\right)^2} \\ \frac{dJ_{IV}}{d\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \ell_c} \frac{2}{(\xi+1)(\xi+2)} \left(\frac{2R_e^2 - 2(\xi+1)R_e\ell_c + \xi\ell_c^2}{\ell_c(2R_e - \ell_c)^2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{I.67})$$

Ces deux limites sont différentes si et seulement si $\frac{\ell_c}{R_e} \neq \xi + 1$. Cette condition est vérifiée car on a supposé pour cette étude $R_e > \ell_c$.

Annexe II

Comportement macroscopique d'une sphère soumise à une extension radiale uniforme

II.1 Modèle d'endommagement par front mince

Le cas d'une sphère composite s'obtient de manière analogue.

Considérons le cas d'une sphère soumise à une extension radiale $\mathbf{u}(R_e) = \Delta R_e$. On suppose que la réponse en déplacement est radiale $\mathbf{u}(r) = u(r)\mathbf{e}_r$. On considère que les milieux sont isotropes et alors la solution en contrainte a pour directions principales $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$, on note $\sigma_{rr} = \Sigma$. L'équilibre du solide en tout point implique que le déplacement se met sous la forme

$$u_i(r) = \frac{C_i}{3\Lambda_i}r + \frac{D_i}{r^2} \quad \text{avec } i = s \text{ ou } d, \quad (\text{II.1})$$

où $\Lambda_i = \lambda_i + 2\mu$ et C_i et D_i sont des constantes à état d'endommagement fixé. Par ailleurs, la continuité du déplacement et de la contrainte radiale à l'interface et les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_s = C_d = C & C = \frac{2}{\frac{1}{\Lambda_s} + \left(\frac{1}{\Lambda_d} - \frac{1}{\Lambda_s}\right) \left(\frac{\ell}{R}\right)^3} \Delta, \\ D_s = \left(\frac{1}{\Lambda_d} - \frac{1}{\Lambda_s}\right) \frac{\Gamma^3}{3} C & D_d = 0. \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

On obtient pour le comportement global

$$\Sigma = C - 4\mu\Delta \quad (\text{II.3})$$

Pendant les phases élastiques *I* et *V*, C est linéaire par rapport à Δ . Il en est donc de même pour Σ . Pendant la phase d'endommagement *III*, on peut écrire pour :

$$4\pi\ell^2 G = -\frac{\partial W}{\partial \ell}, \quad G \leq G_c \quad (\text{II.4})$$

soit lorsque le front se propage la condition de cohérence

$$\frac{\partial C}{\partial \ell} = -\frac{\ell}{R^2} \frac{G_c}{\Delta}. \quad (\text{II.5})$$

On en déduit alors

$$C^2 = \frac{2}{3} \frac{G_c R}{\frac{1}{\Lambda_d} - \frac{1}{\Lambda_s}} \quad (\text{II.6})$$

est une constante au cours de l'endommagement. On en déduit que la courbe de comportement pendant la phase *III* est affine de pente -4μ . La courbe de comportement est identique à celle du cylindre.

II.2 Modèle d'endommagement par front épais TLS

II.2.1 Équations d'équilibre

Considérons une sphère de rayon extérieur R_e soumise à un chargement d'extension radiale. Le déplacement solution est supposé purement radial $\mathbf{u}(r) = u(r)\mathbf{e}_r$, avec la condition aux limites : $\mathbf{u}(R_e) = \Delta R_e \mathbf{e}_r$. On note $\Sigma = \mathbf{e}_r \sigma(R_e) \mathbf{e}_r$.

Alors

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{u}{r} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi) \quad \text{et} \quad \text{tr}(\varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r}. \quad (\text{II.7})$$

La comportement est supposé élastique linéaire isotrope, donc $\sigma = \lambda \text{tr}(\varepsilon)\mathbb{I} + 2\mu\varepsilon$.

L'équation d'équilibre $\text{div}(\sigma) = \mathbf{0}$ s'écrit alors, sous l'hypothèse de coefficient de cisaillement μ constant

$$r^2 u(r) = A \int_0^r \frac{\rho^2 d\rho}{\Lambda} \quad (\text{II.8})$$

où A est une constante qui dépend de l'état d'endommagement du matériau.

La relation de comportement du solide s'écrit

$$\Sigma = \left(\frac{A}{\Delta} - 4\mu \right) \Delta \quad \text{avec} \quad A = \frac{R_e^3}{\int_0^{R_e} \frac{\rho^2 d\rho}{\Lambda}} \Delta \quad (\text{II.9})$$

et la force thermodynamique s'exprime

$$Y = -\frac{\partial w}{\partial d} = -\frac{1}{d'} \frac{\partial w}{\partial \hat{\phi}} = \frac{1}{2} \frac{A^2}{\Delta \Lambda} \quad (\text{II.10})$$

On a donc

$$\bar{Y} = \frac{A^2}{2\Delta\Lambda}. \quad (\text{II.11})$$

II.2.2 Analyse du premier modèle

Le comportement de la sphère se divise en cinq phases, identiques à celles du cylindre.

II.2.2.1 Comportement élastique sain

Λ est uniforme dans la sphère, donc

$$\int_0^{R_e} \frac{\rho^2 d\rho}{\Lambda} = \frac{1}{\Lambda_s} \frac{R_e^3}{3} \quad (\text{II.12})$$

D'où la loi de comportement

$$\Sigma = (3\Lambda_s - 4\mu)\Delta = \kappa_s \Delta \quad (\text{II.13})$$

avec $\kappa = 3\lambda + 2\mu$.

II.2.2.2 Apparition de la zone d'endommagement

Notons ℓ la position du front d'endommagement Γ repérée par la surface $\phi = 0$. La bande d'endommagement est donc une sphère de rayon ℓ inférieur à ℓ_c .

Comme

$$\int_0^{R_e} \frac{\rho^2 d\rho}{\Lambda} = \frac{R_e^3}{3} \left(\frac{1}{\Lambda_s} + \frac{\beta^3}{4\alpha} \frac{1}{\Delta\Lambda} \right), \quad (\text{II.14})$$

la loi de comportement du solide est

$$\Sigma = \left(\frac{3}{\frac{1}{\Lambda_s} + \frac{\beta^3}{4\alpha} \frac{1}{\Delta\Lambda}} - 4\mu \right) \Delta \quad (\text{II.15})$$

avec $\alpha = \frac{\ell_c}{\ell}$ et $\beta = \frac{\ell}{R_e}$.

Il y a évolution du front d'endommagement lorsque $\bar{Y} = Y_c$ *i.e.*

$$\Delta = \frac{1}{3} \sqrt{2Y_c \Delta\Lambda} \left(\frac{1}{\Lambda_s} + \frac{\beta^3}{4\alpha} \frac{1}{\Delta\Lambda} \right) \quad (\text{II.16})$$

.

Si on impose une déformation Δ croissante, la sphère suit la loi de comportement

$$\Sigma = \sqrt{2Y_c \Delta\Lambda} - 4\mu\Delta. \quad (\text{II.17})$$

II.2.2.3 Déplacement de la zone d'endommagement

Une fois que la bande d'endommagement a atteint sa largeur maximale ℓ_c , elle se propage dans le milieu.

Alors,

$$\int_0^{R_e} \frac{\rho^2 d\rho}{\Lambda} = \frac{\ell^3}{3} \left(\frac{1}{\Lambda_s} \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\Delta\Lambda} f(\alpha) \right) \quad (\text{II.18})$$

avec

$$f(\alpha) = \frac{1}{4} (-\alpha^3 + 4\alpha^2 - 6\alpha + 4) \quad (\text{II.19})$$

La relation de comportement est alors

$$\Sigma = \left(\frac{3}{\frac{1}{\Lambda_s} + \frac{1}{3}\beta^2 f(\alpha) \frac{1}{\Delta\Lambda}} - 4\mu \right) \Delta. \quad (\text{II.20})$$

Le critère d'évolution du front est atteint lorsque

$$\Delta = \frac{1}{3} \sqrt{2Y_c \Delta\Lambda} \left(\frac{1}{\Lambda_s} + \beta^3 4f(\alpha) \frac{1}{\Delta\Lambda} \right), \quad (\text{II.21})$$

d'où le comportement en chargement monotone croissant

$$\Sigma = \sqrt{2Y_c \Delta\Lambda} - 4\mu\Delta. \quad (\text{II.22})$$

On remarque que lorsque $\alpha = 1$, il y a continuité du comportement entre les deux phases de l'endommagement.

II.2.2.4 Disparition de la zone d'endommagement

Lorsque le front d'endommagement atteint le bord extérieur de la sphère, la bande commence à disparaître. Pendant cette phase, on vérifie $\ell \geq R_e \geq \ell - \ell_c$.

Alors,

$$\int_0^{R_e} \frac{\rho^2 d\rho}{\Lambda} = \frac{\ell^3}{3} \left(\frac{1}{\Lambda_s} \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\Delta\Lambda} \frac{1}{4\alpha} \left(\frac{4\beta - 3}{\beta^4} + (\alpha - 1)^4 \right) \right). \quad (\text{II.23})$$

La relation de comportement est donc

$$\Sigma = \left(\frac{3}{\frac{1}{\Lambda_s} + \frac{1}{\Delta\Lambda} \frac{1}{4\alpha} \left(\frac{4\beta - 3}{\beta} + \beta^3 (\alpha - 1)^4 \right)} - 4\mu \right) \Delta. \quad (\text{II.24})$$

Le critère d'évolution du front est atteint lorsque

$$\Delta = \frac{1}{3} \sqrt{2Y_c \Delta\Lambda} \left(\frac{1}{\Lambda_s} + \frac{1}{\Delta\Lambda} \frac{1}{4\alpha} \left(\frac{4\beta - 3}{\beta} + \beta^3 (\alpha - 1)^4 \right) \right), \quad (\text{II.25})$$

d'où le comportement en chargement monotone croissant

$$\Sigma = \sqrt{2Y_c\Delta\Lambda} - 4\mu\Delta. \quad (\text{II.26})$$

II.2.2.5 Comportement élastique endommagé

Le résultat est identique au comportement élastique sain, avec $\Lambda = \Lambda_d$. Donc

$$\Sigma = (3\Lambda_d - 4\mu)\Delta = \kappa_d\Delta \quad (\text{II.27})$$

et il n'y a plus d'évolution possible.

Annexe III

Bi-linear cohesive law

We define the following dimensionless quantities

$$\hat{w}_1 = w_1/w_f, \quad \hat{w}_k = w_k/w_f, \quad \hat{\sigma}_k = \sigma_k/\sigma_f \quad (\text{III.1})$$

By construction, we have the following relation

$$\hat{\sigma}_k = 1 - \hat{w}_k/\hat{w}_1 \quad (\text{III.2})$$

The tension opening relation is

$$\hat{\sigma} = f(\hat{w}) = 1 - \hat{w}/\hat{w}_1, \quad 0 \leq \hat{w} \leq \hat{w}_k \quad (\text{III.3})$$

$$\hat{\sigma} = f(\hat{w}) = \frac{\hat{\sigma}_k}{1 - \hat{w}_k} (1 - \hat{w}), \quad \hat{w}_k \leq \hat{w} \quad (\text{III.4})$$

$$(\text{III.5})$$

For the first and second part of the law, we solve (5.49) for each part of the tension-opening function :

$$\hat{\sigma} = 1 - \lambda \hat{\sigma} I / \hat{w}_1 = \frac{1}{1 + (\lambda / \hat{w}_1) I} \Rightarrow H = \frac{2\hat{\phi} - \hat{\phi}^2}{(1 - \hat{\phi} + (\lambda / \hat{w}_1) \hat{\phi}^2)^2} \quad (\text{III.6})$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}_k}{1 - \hat{w}_k} (1 - \lambda \hat{\sigma} I) = \frac{\hat{\sigma}_k / (1 - \hat{w}_k)}{1 + \hat{\sigma}_k / (1 - \hat{w}_k) \lambda I} \Rightarrow H = \left(\frac{\hat{\sigma}_k}{1 - \hat{w}_k} \right)^2 \frac{2\hat{\phi} - \hat{\phi}^2}{(1 - \hat{\phi} + \frac{\lambda \hat{\sigma}_k}{1 - \hat{w}_k} \hat{\phi}^2)^2} \quad (\text{III.7})$$

where

$$H(\hat{\phi}) = \int_0^{\hat{\phi}} h(\hat{\phi}) d\hat{\phi} \quad (\text{III.8})$$

It remains to determine for which value $\hat{\phi}_k$ of $\hat{\phi}$ we move from the first to the second function. This value must ensure the continuity of H . Thus

$$\hat{\phi}_k = \frac{a}{2} (\sqrt{1 + 4/a} - 1) \quad (\text{III.9})$$

with $a = \frac{\hat{w}}{\lambda \hat{\sigma}_k}$ and $\hat{\phi}_k$ between 0 and 1.

Annexe IV

Conditions on the parameters

It has been shown that h must verify condition (5.43) to ensure uniqueness of the solution. In the particular case of a linear cohesive model, uniqueness condition writes

$$\lambda \leq \frac{1}{2} \quad (\text{IV.1})$$

If $\lambda > \frac{1}{2}$, there exists a critical value $\hat{\phi}_k$ above which $h' < 0$ (corresponding to the red part of the curve in Figure 5.2b). It is difficult to obtain an explicit form of its value.

Concerning bi-linear model, two parameters are defined

$$\lambda_1 = \frac{2\sigma_f \ell_c}{E w_1}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sigma_2 \ell_c}{E w_f} = \frac{2\sigma_k \ell_c}{E(w_f - w_k)} \quad (\text{IV.2})$$

The first one, λ_1 , characterizes the first slope of the cohesive law and λ_2 the second one. Let us consider $\lambda_1 > \frac{1}{2}$. Then, as seen above, there exists a critical value of $\hat{\phi}$ that must not be exceeded. This value corresponds to a point of the cohesive law that must not be reached. If the position of the slope-discontinuity point is located before the critical point, the condition $h' \geq 0$ is respected for the first part of the cohesive law. Finally, choosing $\lambda_2 \leq \frac{1}{2}$ ensures the condition for the whole local behavior. Some examples of equivalent one-dimensional strain-stress curves for a bi-linear cohesive law are shown in Figure 5.7b.

Annexe V

Damage evolution in TLS and load factor

We rewrite the evolution criterion (5.18) by defining the averaged quantities

$$\bar{Y} = \frac{\int_{\phi=0}^{\ell} Y \frac{d'(\phi/\ell_c)}{\ell_c} \left(1 - \frac{\phi}{\rho(s)}\right) d\phi}{\int_{\phi=0}^{\ell} \frac{d'(\phi/\ell_c)}{\ell_c} \left(1 - \frac{\phi}{\rho(s)}\right) d\phi} \quad \text{and} \quad \overline{h(d)Y_c} = Y_c \frac{\int_{\phi=0}^{\ell} h(d) \frac{d'(\phi/\ell_c)}{\ell_c} \left(1 - \frac{\phi}{\rho(s)}\right) d\phi}{\int_{\phi=0}^{\ell} \frac{d'(\phi/\ell_c)}{\ell_c} \left(1 - \frac{\phi}{\rho(s)}\right) d\phi} \quad (\text{V.1})$$

where (s, ϕ) is a local basis, s a curvilinear abscissa of the front and $\rho(s)$ the curvature of the damage front. Let f_n denote the evolution criterion (5.18) at a given time step n

$$f_n = \mu_n^2 \bar{Y}_n - \overline{h(d)Y_c} \quad (\text{V.2})$$

where Y_n is the local release rate at the same iteration for a unitary load and μ_n is the load factor. The load factor at step n is computed in order to have

$$\max_{\Gamma} (f_n) = 0 \quad (\text{V.3})$$

where Γ is the damage front. Thus

$$\mu_n = \sqrt{\frac{\overline{h(d)Y_c}}{\max_{\Gamma} (\bar{Y}_n)}} \quad (\text{V.4})$$

According to (5.18), only a single point of the front would evolve. However, as moving a single point of the front is not possible for a time-discretised problem [18], it is chosen to predict f_{n+1} and to apply a discretised version of the evolution law (5.18) :

$$\forall \text{ step } n, \quad \begin{cases} f_{n+1}^{\text{pred}} \leq 0 \\ \Delta\phi \geq 0 \\ f_{n+1}^{\text{pred}} \Delta\phi = 0 \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

and we impose

$$\max \Delta\phi = \Delta\phi_{\max} \quad (\text{V.6})$$

where $\Delta\phi_{\max}$ is chosen to be about 0.25 of the mesh characteristic length and

$$f_{n+1}^{\text{pred}} = \bar{Y}_{n+1}^{\text{pred}} - \overline{h(d)Y_c}^{\text{pred}} \quad (\text{V.7})$$

In order to approximate f_{n+1}^{pred} , a first order development and two hypothesis are made :

- strain derivative following the front is only influenced by the variation of the load factor ;
- the boundary variations are neglected, because of the numerical difficulties linked to their computation, so $\int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} X_{n+1} d\phi \approx \int_{a_n}^{b_n} (X_n + \Delta X_n) d\phi$.

Thus

$$f_{n+1}^{\text{pred}} \approx f_n + \alpha_n \Delta \mu_n^{\text{pred}} - \beta_n \Delta \phi_n \quad (\text{V.8})$$

with

$$\begin{cases} \alpha_n &= 2\mu_n \frac{\int_{\phi=0}^{\ell} \frac{1}{2} \varepsilon_n : \mathbb{C} : \varepsilon_n \frac{d'(\phi/\ell_c)}{\ell_c} \left(1 - \frac{\phi}{\rho(s)}\right) d\phi}{\int_{\phi=0}^{\ell} \frac{d'(\phi/\ell_c)}{\ell_c} \left(1 - \frac{\phi}{\rho(s)}\right) d\phi} \\ \beta_n &= Y_c \frac{\int_{\phi=0}^{\ell} h'(d) \frac{d'(\phi/\ell_c)}{\ell_c} \left(1 - \frac{\phi}{\rho(s)}\right) d\phi}{\int_{\phi=0}^{\ell} \frac{d'(\phi/\ell_c)}{\ell_c} \left(1 - \frac{\phi}{\rho(s)}\right) d\phi} \end{cases} \quad (\text{V.9})$$

that are computed all over Ω with the same variational formulation than \bar{Y} . Among all the quantities in (V.8), only $\Delta \mu$ has a unique value over the whole domain. So, as all f_{n+1} are wanted to be negative and $0 < \Delta \phi_n < \Delta \phi_{\max}$, it can be determined that

$$\Delta \mu_n^{\text{pred}} < \min_{\Gamma} \frac{f_n + \Delta \phi_{\max} \beta_n}{\alpha_n} \quad (\text{V.10})$$

This quantity is well defined since $\forall s, \alpha_n > 0$ which is true for $\mu_n > 0$. Equation (V.6) imposes

$$\Delta \mu_n^{\text{pred}} = \min_{\Gamma} \frac{f_n + \Delta \phi_{\max} \beta_n}{\alpha_n} \quad (\text{V.11})$$

As it is possible to have μ determined by a point of the front that is not advancing, it is chosen to replace its value by the point that has determined $\Delta \mu_n^{\text{pred}}$, that is

$$\mu^{\text{corr}} = \arg \min_{\Gamma} \frac{f_n + \Delta \phi_{\max} \beta_n}{\alpha_n} \quad (\text{V.12})$$

Finally, the front advance is chosen to be

$$\Delta \phi = \max \left(0, \frac{f_n + \alpha_n^{\text{corr}} \Delta \mu_n^{\text{pred}}}{\beta_n} \right) \quad (\text{V.13})$$

in order to have f_{n+1}^{pred} as close to 0 as possible while verifying (V.5). α_n^{corr} denotes α value computed with μ^{corr} instead of μ . Let us remark that $\Delta \mu_n^{\text{pred}}$ is just a "prediction" and is different from $\mu_{n+1} - \mu_n$. Moreover, its value is always positive even if the load factor is decreasing over steps. Once $\Delta \phi$ is known over the front, the level-set is updated [18].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Syed Yasir Alam, Panagiotis Kotronis et Ahmed Loukili. Crack propagation and size effect in concrete using a non-local damage model. *Engineering Fracture Mechanics*, 109:246–261, 2013. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794413002543>.
- [2] Syed Yasir Alam, Jacqueline Saliba et Ahmed Loukili. Study of evolution of fracture process zone in concrete by simultaneous application of digital image correlation and acoustic emission. 2013.
- [3] G. Allaire, F. Jouve et N. Van Goethem. A level set method for the numerical simulation of damage evolution. Dans *ICIAM 07 : 6th International Conference on Industrial and Applied Mathematics, Zürich, Switzerland, 16-20 July 2007 : invited lectures*, page 3. Amer Mathematical Society, 2009.
- [4] Luigi Ambrosio et Vincenzo Maria Tortorelli. Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via Γ -convergence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 43(8):999–1036, décembre 1990. ISSN 1097-0312. URL <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/cpa.3160430805/abstract>.
- [5] G. I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks formed in brittle fracture. *Zhurnal Prikladnoy Mekhaniki i Tekhnicheskoy Fiziki*, (4):3–56, 1961.
- [6] Zdenek P. Bažant. *Scaling of structural strength*. Butterworth-Heinemann, 2005. URL <https://books.google.fr/books?hl=fr&lr=&id=3MHdpISDp3YC&oi=fnd&pg=PP1&dq=bazant+scaling+of+structural+strength&ots=sjoZ5avpFg&sig=UBVB0A3ulace4RASQ8FsILS0UhQ>.
- [7] Zdenek P. Bažant et Zhengzhi Li. Modulus of rupture : size effect due to fracture initiation in boundary layer. *Journal of Structural Engineering*, 121(4):739–746, 1995. URL [http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1995\)121:4\(739\)](http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/(ASCE)0733-9445(1995)121:4(739)).
- [8] Zdenek P. Bažant et Zhengzhi Li. Zero-brittleness size-effect method for one-size fracture test of concrete. *Journal of engineering mechanics*, 122(5):458–468, 1996. URL [http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1996\)122:5\(458\)](http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/(ASCE)0733-9399(1996)122:5(458)).
- [9] Zdenek P. Bažant et Phillip A. Pfeiffer. Determination of fracture energy from size effect and brittleness number. *ACI Materials Journal*, 84

- (6), 1987. URL <http://www.concrete.org/Publications/InternationalConcreteAbstractsPortal.aspx?m=details&i=2526>.
- [10] Z. P. Bažant. Scaling of quasibrittle fracture : asymptotic analysis. *International Journal of Fracture*, 83(1):19–40, 1997. URL <http://link.springer.com/article/10.1023/A:1007387823522>.
- [11] Zdenek P. Bažant. Instability, ductility, and size effect in strain-softening concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 102(2):331–344, 1976. URL <http://cedb.asce.org/cgi/WWWdisplay.cgi?6599>.
- [12] Zdenek P. Bažant. Size effect in blunt fracture : concrete, rock, metal. *Journal of Engineering Mechanics*, 110(4):518–535, 1984. URL [http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1984\)110:4\(518\)](http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/(ASCE)0733-9399(1984)110:4(518)).
- [13] Zdenek P. Bažant. Fracture mechanics and strain-softening of concrete. Dans *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures*, pages 121–150. ASCE, 1985. URL <http://cedb.asce.org/cgi/WWWdisplay.cgi?8600629>.
- [14] Zdenek P. Bažant. Size effect on structural strength : a review. *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)*, 69(9-10):703–725, novembre 1999. ISSN 0939-1533, 1432-0681. URL <http://link.springer.com/article/10.1007/s004190050252>.
- [15] Zdenek P. Bažant et Jaime Planas. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasi-brittle Materials*. CRC Press, 1998. ISBN 978-0-8493-8284-0.
- [16] Zdeněk P. Bažant. Size effect aspects of measurement of fracture characteristics of quasi-brittle material. *Advanced Cement Based Materials*, 4(3):128–137, 1996. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1065735596900814>.
- [17] Zdeněk P. Bažant et Qiang Yu. Universal size effect law and effect of crack depth on quasi-brittle structure strength. *Journal of engineering mechanics*, 135(2):78–84, 2009. URL [http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2009\)135:2\(78\)](http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/(ASCE)0733-9399(2009)135:2(78)).
- [18] P.E. Bernard, N. Moës et N. Chevaugeon. Damage growth modeling using the Thick Level Set (TLS) approach : Efficient discretization for quasi-static loadings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 233-236:11–27, août 2012. ISSN 00457825. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S004578251200062X>.

- [19] HD Bui et K.D. Van. Généralisation de la théorie de la rupture de Griffith. *J. Mech. Appl*, 3(2):205–225, 1979.
- [20] Hui Duong Bui, Ky Dang Van et Claude Stolz. Formulations variationnelles du problème en vitesse pour le solide élastique fragile. *Comptes Rendus Académie des Sciences de Paris*, Série II(t.292):251–254, 1981.
- [21] Hui Duong Bui et Alain Ehrlicher. Vitesse de propagation d’une zone endommagée dans un solide élastique fragile en mode III. *Comptes Rendus Académie des Sciences de Paris*, Série II(t.293):95–98, 1981.
- [22] Fabien Cazes, Michel Coret, Alain Combescure et Anthony Gravouil. A thermodynamic method for the construction of a cohesive law from a nonlocal damage model. *International Journal of Solids and Structures*, 46(6):1476–1490, mars 2009. ISSN 00207683. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020768308004903>.
- [23] Fabien Cazes et Nicolas Moës. Comparison of a phase-field model and of a thick level set model for brittle and quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2015. URL <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nme.4886/full>.
- [24] D. A. Cendón, J. C. Gálvez, M. Elices et J. Planas. Modelling the fracture of concrete under mixed loading. *International Journal of Fracture*, 103(3):293–310, 2000. URL <http://link.springer.com/article/10.1023/A:1007687025575>.
- [25] N. Chandra, H. Li, C. Shet et H. Ghonem. Some issues in the application of cohesive zone models for metal–ceramic interfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10):2827–2855, 2002. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002076830200149X>.
- [26] Genady P. Cherepanov. Crack propagation in continuous media : PMM vol. 31, no. 3, 1967, pp. 476–488. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 31(3):503–512, 1967. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021892867900342>.
- [27] J. W. Craggs. On the propagation of a crack in an elastic-brittle material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8(1):66–75, janvier 1960. ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509660900065>.

- [28] D. S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8(2):100–104, 1960. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509660900132>.
- [29] A. Ehrlacher. *Contribution à l'étude thermodynamique de la progression de fissure et à la mécanique de l'endommagement brutal*. Thèse de doctorat, 1985.
- [30] M. Elices et J. Planas. *Material models*. Chapman and Hall, London, 1989.
- [31] Bernard Fedelich et Alain Ehrlacher. Sur un principe du minimum concernant les matériaux indépendant du temps physique. *Comptes Rendus Académie des Sciences de Paris, Série II* (t.308):1391–1394, 1989.
- [32] G.A. Francfort et J.J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8):1319–1342, 1998.
- [33] M. Frémond et B. Nedjar. Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures*, 33(8):1083–1103, 1996.
- [34] Peter Grassl, David Grégoire, B. Rojas-Solano, Laura et Gilles Pijaudier-Cabot. Meso-scale modelling of the size effect on the fracture process zone of concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 49(13):1818–1827, 2012. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00737096>.
- [35] Alan A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, pages 163–198, 1921. URL <http://www.jstor.org/stable/91192>.
- [36] D. Grégoire, L.b. Rojas-Solano et G. Pijaudier-Cabot. Failure and size effect for notched and unnotched concrete beams. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37(10):1434–1452, 2013. ISSN 1096-9853. URL <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nag.2180/abstract>.
- [37] David Grégoire, Laura Verdon, Vincent Lefort, Peter Grassl, Jacqueline Saliba, Jean-Pierre Regoin, Ahmed Loukili et Gilles Pijaudier-Cabot. Mesoscale analysis of failure in quasi-brittle materials : comparison between lattice model and acoustic emission data. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2015. URL <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nag.2363/full>.
- [38] G. V. Guinea, J. Planas et M. Elices. A general bilinear fit for the softening curve of concrete. *Materials and Structures*, 27(2):99–105, 1994. URL <http://link.springer.com/article/10.1007/BF02472827>.

- [39] P. J. Gustafsson et A. Hillerborg. Improvements in concrete design achieved through the application of fracture mechanics. Dans *Application of fracture mechanics to cementitious composites*, pages 667–680. Springer, 1985. URL http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-009-5121-1_24.
- [40] J. C. Gálvez, M. Elices, G. V. Guinea et J. Planas. Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading. *International Journal of Fracture*, 94(3):267–284, 1998. URL <http://link.springer.com/article/10.1023/A:1007578814070>.
- [41] K. Haidar, G. Pijaudier-Cabot, J. F. Dubé et A. Loukili. Correlation between the internal length, the fracture process zone and size effect in model materials. *Materials and Structures*, 38(2):201–210, mars 2005. ISSN 1359-5997, 1871-6873. URL <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02479345>.
- [42] A. Hillerborg, M. Modéer et P. E. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6):773–781, novembre 1976. ISSN 0008-8846. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0008884676900077>.
- [43] Arne Hillerborg. Results of three comparative test series for determining the fracture energy G_F of concrete. *Materials and Structures*, 18(5):407–413, septembre 1985. ISSN 1359-5997, 1871-6873. URL <http://link.springer.com/article/10.1007/BF02472416>.
- [44] Christian G. Hoover et Zdeněk P. Bažant. Cohesive crack, size effect, crack band and work-of-fracture models compared to comprehensive concrete fracture tests. *International Journal of Fracture*, 187(1):133–143, 2014. URL <http://link.springer.com/article/10.1007/s10704-013-9926-0>.
- [45] Christian G. Hoover et Zdeněk P. Bažant. Universal size-shape effect law based on comprehensive concrete fracture tests. *Journal of Engineering Mechanics*, 140(3):473–479, 2014. URL [http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000627](http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000627).
- [46] Christian G. Hoover, Zdeněk P. Bažant, Jan Vorel, Roman Wendner et Mija H. Hubler. Comprehensive concrete fracture tests : Description and results. *Engineering Fracture Mechanics*, 114:92–103, 2013. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794413002737>.

- [47] Charles Edward Inglis. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Proc. Inst. Naval Architects*, 154:219–241, 1913. URL http://imechanica.org/files/1913%20Inglis%20Stress%20in%20a%20plate%20due%20to%20the%20presence%20of%20cracks%20and%20sharp%20corners_0.pdf.
- [48] G. R. Irwin. Fracture. *Encyclopaedia of Physics*, Vol. VI. *Springer-Verlag*, 1:168, 1958.
- [49] L. M. Kachanov. Time of the rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk*, 8:26–31, 1958.
- [50] Alain Karma, David A. Kessler et Herbert Levine. Phase-field model of mode III dynamic fracture. *Physical Review Letters*, 87(4):045501, 2001. URL <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.87.045501>.
- [51] James K. Knowles et Eli Sternberg. Discontinuous deformation gradients near the tip of a crack in finite anti-plane shear : an example. *Journal of Elasticity*, 10(1):81–110, 1980. URL <http://link.springer.com/article/10.1007/BF00043136>.
- [52] Eric Lorentz, S. Cuvilliez et K. Kazymyrenko. Convergence of a gradient damage model toward a cohesive zone model. *Comptes Rendus Mécanique*, 339(1):20–26, 2011. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631072110001671>.
- [53] Jacky Mazars. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de doctorat, 1984. URL <http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=9153637>.
- [54] Jacky Mazars et Gilles Pijaudier-Cabot. From damage to fracture mechanics and conversely : a combined approach. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20):3327–3342, 1996. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768396000157>.
- [55] Christian Miehe, Martina Hofacker et Fabian Welschinger. A phase field model for rate-independent crack propagation : Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(45):2765–2778, 2010. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782510001283>.
- [56] Sidney Mindess. The effect of specimen size on the fracture energy of concrete. *Cement and Concrete Research*, 14(3):431–436, mai 1984. ISSN 0008-8846. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0008884684900620>.

- [57] N. Moës, N. Chevaugeon et F. Dufour. A regularized brittle damage model solved by a level set technique. Dans *IUTAM Symposium on Theoretical, Computational and Modelling Aspects of Inelastic Media*, pages 89–96. Springer, 2008.
- [58] N. Moes, J. Dolbow et T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131–150, septembre 1999.
- [59] Kévin Moreau, Nicolas Moës, Didier Picart et Laurent Stainier. Explicit dynamics with a non-local damage model using the thick level set approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102(3-4):808–838, 2015. URL <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nme.4824/full>.
- [60] N. Moës, C. Stolz, P.-E. Bernard et N. Chevaugeon. A level set based model for damage growth : The thick level set approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(3):358–380, avril 2011. ISSN 00295981. URL <http://doi.wiley.com/10.1002/nme.3069>.
- [61] Nicolas Moës, Claude Stolz et Nicolas Chevaugeon. Coupling local and non-local damage evolutions with the Thick Level Set model. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 1(1):1–21, 2014. URL <http://link.springer.com/article/10.1186/s40323-014-0016-2>.
- [62] A. Needleman. An analysis of tensile decohesion along an interface. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38(3):289–324, 1990. ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002250969090001K>.
- [63] Q.S. Nguyen et S. Andrieux. The non-local generalized standard approach : a consistent gradient theory. *Comptes Rendus Mécanique*, 333(2):139–145, 2005.
- [64] Q.S. Nguyen, R.M. Pradeilles et C. Stolz. Sur une loi de propagation régularisante en rupture et endommagement fragile. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'univers, Sciences de la Terre*, 309(16):1515–1520, 1989.
- [65] A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov et R.P. Boas. *Special functions of mathematical physics*. Birkhäuser BaselBoston, 1988.
- [66] Koji Otsuka et Hidehumi Date. Fracture process zone in concrete tension specimen. *Engineering Fracture Mechanics*, (65):111–131, 2000.

- [67] Kyoungsoo Park, Glaucio H. Paulino et Jeffery R. Roesler. Determination of the kink point in the bilinear softening model for concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(13):3806–3818, 2008. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794408000398>.
- [68] Andrés Parrilla Gómez, Nicolas Moës et Claude Stolz. Comparison between Thick Level Set (TLS) and cohesive zone models. 2015.
- [69] RHJ Peerlings, R.R. Borst, WAM Brekelmans, J.H.P. Vree et al. Gradient damage for quasi-brittle materials. 1994.
- [70] RHJ Peerlings, R.R. de Borst, WAM Brekelmans et J.H.P. Vree. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3391–3403, 1996.
- [71] P.-E. Petersson. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. 1981. URL http://www.iaea.org/inis/collection/NCLCollectionStore/_Public/13/668/13668228.pdf.
- [72] G. Pijaudier-Cabot et ZP Bažant. Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(10):1512–1533, 1987.
- [73] Gilles Pijaudier-Cabot et Zdenek P. Bažant. Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(10):1512–1533, 1987. URL [http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1987\)113:10\(1512\)](http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:10(1512)).
- [74] J. Planas et M. Elices. Shrinkage eigenstresses and structural size-effect. *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, pages 939–950, 1992.
- [75] Andrei D. Polyanin et Valentin F. Zaitsev. *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations*, volume 1. Boca Raton, crc press édition, 1995. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1995heso.book.....P>.
- [76] R.M. Pradeilles-Duval et C. Stolz. Sur le problème d’évolution des solides avec changement de phase irréversible. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l’univers, Sciences de la Terre*, 313(3):297–302, 1991.
- [77] R.M. Pradeilles-Duval et C. Stolz. Mechanical transformations and discontinuities along a moving surface. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(1):91–121, 1995.
- [78] YR Rashid. Analysis of prestressed Concrete Pressure Vessels. *Nuclear Eng. and Design*, 7(4):334–344, 1968. URL <http://ci.nii.ac.jp/naid/30008384800/>.

- [79] James R. Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of applied mechanics*, 35(2):379–386, 1968. URL <http://appliedmechanics.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1398618>.
- [80] RILEM. Determination of the Fracture Energy of Mortar and Concrete by Means of Three-Point Bend Tests on Notched Beames. *Materials and Structures*, 18(106):285–290, 1985. URL <http://ci.nii.ac.jp/naid/10002953477/>.
- [81] P. E. Roelfstra et Folker H. Wittmann. Numerical method to link strain softening with failure of concrete. Dans *Fracture toughness and fracture energy of concrete*, pages 163–175. 1986. URL http://www.researchgate.net/publication/266765233_Numerical_method_to_link_strain_softening_with_failure_of_concrete.
- [82] Alexis Salzman, Nicolas Moës et Nicolas Chevaugeon. On use of the thick level set method in 3d quasi-static crack simulation of quasi-brittle material. En cours de préparation.
- [83] James Albert Sethian. *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*, volume 3. Cambridge university press, 1999. URL https://books.google.fr/books?hl=fr&lr=&id=ErpOoyneE4dIC&oi=fnd&pg=PR1&dq=level+set&ots=N_ghC2TTId&sig=snIXCEDa0ohltpbEm_vnuUzs2tU.
- [84] E. Smith. The size of the cohesive zone at a crack tip. *Engineering Fracture Mechanics*, 7(2):285–289, 1975. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0013794475900090>.
- [85] C. Stolz et N. Moës. A new model of damage : a moving thick layer approach. *International Journal of Fracture*, pages 1–12, 2012.
- [86] Claude Stolz. Bifurcation of equilibrium solutions and defects nucleation. *International Journal of Fracture*, 147:103–107, 2007.
- [87] Claude Stolz. Thermodynamical description of running discontinuities : Application to friction and wear. *Entropy*, 12(6):1418–1439, 2010. URL <http://www.mdpi.com/1099-4300/12/6/1418>.
- [88] Claude Stolz et Nicolas Moes. On the rate boundary value problem for damage modelization by thick level-set. *ACOME-2012, Ho-Chi-Minh, Thu-Duc University*, pages 205–220, 2012. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00725635/>.

- [89] Claude Stolz et Andrés Parrilla Gómez. Antiplane shear field for a class of hyperelastic incompressible brittle material : analytical and numerical approaches. Accepté en 2015.
- [90] F. P. van der Meer et L. J. Sluys. The Thick Level Set method : Sliding deformations and damage initiation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 285:64–82, 2015. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782514003909>.
- [91] P. F. Walsh. Fracture of plain concrete. *Indian Concrete Journal*, 46(11), 1972. URL <http://trid.trb.org/view.aspx?id=26076>.
- [92] Waloddi Weibull. *The phenomenon of rupture in solids*. Generalstabens Litografiska Anst., 1939.
- [93] Eric W. Weisstein. Gegenbauer Polynomial. URL <http://mathworld.wolfram.com/GegenbauerPolynomial.html>.

Thèse de Doctorat

Andrés PARRILLA GÓMEZ

Analyses numérique et analytique couplées d'un modèle d'endommagement gradué

Coupled analytical and computational analysis of the Thick Level Set damage model

La prédiction de la durée de vie des structures est un enjeu majeur de l'ingénierie. Dans le cas des matériaux quasi-fragiles comme le béton, ceci passe nécessairement par la prédiction de l'apparition et de la propagation des fissures. Classiquement, deux approches ont été proposées pour modéliser ces phénomènes. D'une part, les modèles réduisant la zone endommagée à une ligne (pour un problème bidimensionnel). D'autre part, les modèles d'endommagement où la dégradation est représentée par une variable locale. Ces deux approches sont fondamentalement différentes mais ont toutes les deux des défauts connus : la modélisation de l'endommagement diffus et de l'apparition des fissures pour la première et la nécessité d'une régularisation, la difficulté à effectuer la transition entre un endommagement et une fissuration et la mauvaise représentation de l'effet d'échelle pour la deuxième. Un nouveau modèle fut donc proposé en 2010, représentant l'endommagement par le biais d'une fonction de niveau dite épaisse (Thick Level Set ou TLS) et se plaçant entre les deux familles précédentes. Une analyse de ce modèle est faite dans cette thèse. Ainsi, une fois que la propagation auto-similaire d'une fissure est étudiée, on s'intéresse à la recherche d'un comportement d'adoucissement permettant d'identifier des campagnes expérimentales mettant en jeu les effets d'échelle et de bord. À cette fin, on établit une comparaison entre les modèles TLS et cohésif. Une équivalence unidimensionnelle entre leur comportement macroscopiques conduit à un choix de fonctions d'adoucissement qui s'est avéré pertinent lors de la confrontation avec des résultats expérimentaux récents.

Mots-clés mécanique de l'endommagement, fonction de niveau épaisse (TLS), propagation auto-similaire, effet d'échelle, modèle de zone cohésive.

Predicting service life of structures is a major issue of engineering. When considering quasi-brittle materials such as concrete, this implies to predict fracture formation and propagation. Two main approaches have been classically used to model these phenomena. First, models that reduce damage zone to a line (for bidimensional problems). Second, damage model where degradation is represented by a local variable. These two approaches are fundamentally different but both have well-known defaults : modeling diffuse damage and crack formation for the first one and the need for regularization, the difficulty to make the transition between damage and cracks and the bad representation of size and shape effects for the second one. A new model was proposed in 2010, in which damage is represented by a thick level set and can be considered as a bridge between previous models. An analysis of this model is performed here. Once the self-similar propagation of a crack is studied, we look for a softening behavior enabling to fit experimental data of size and shape effects. For this purpose, a comparison is established between TLS and cohesive models. A one dimensional equivalence of their behavior leads to a choice of softening functions that arises to be adapted to fit recent experimental data.

Keywords damage mechanics, thick level-set (TLS), self-similar propagation, size-effect, cohesive zone model.